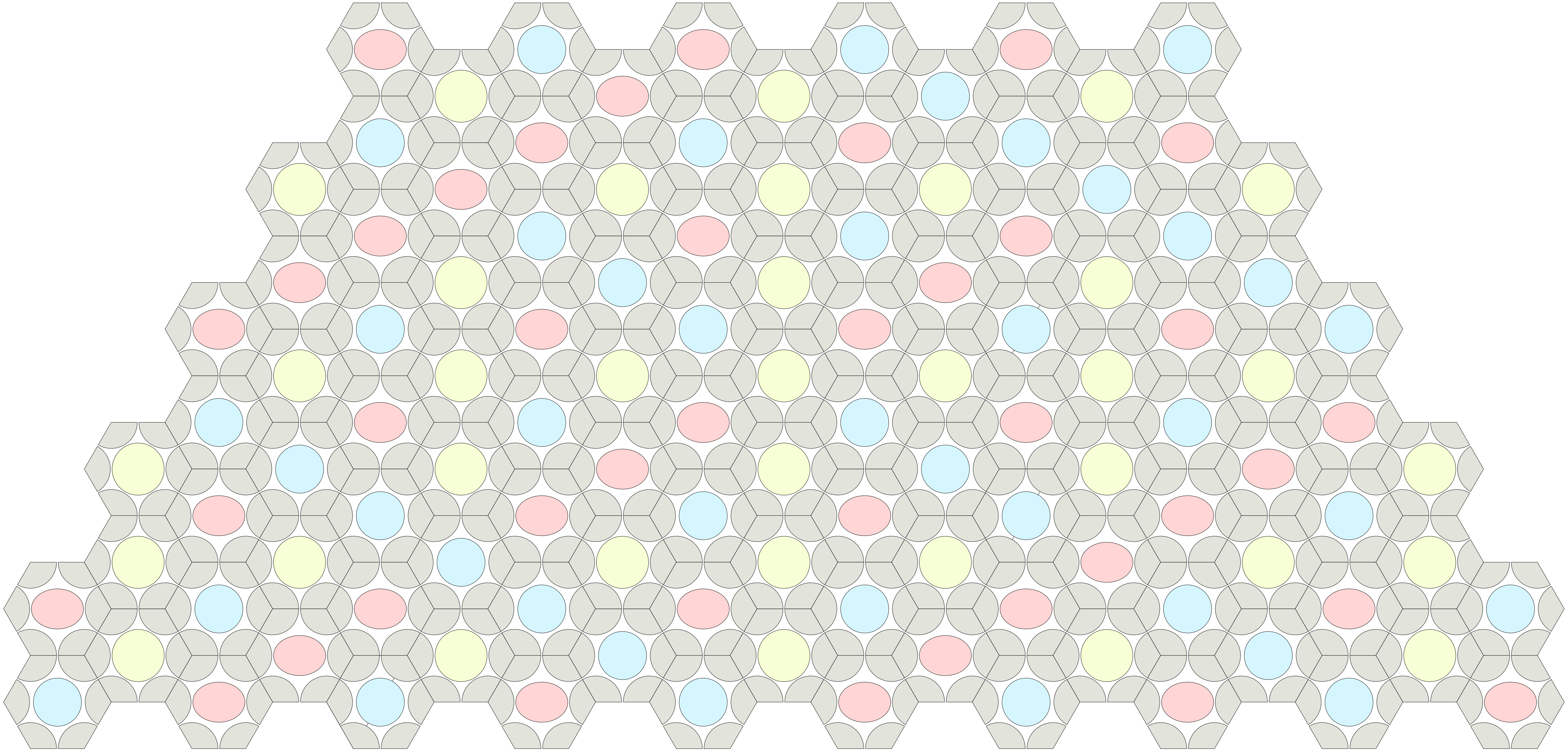
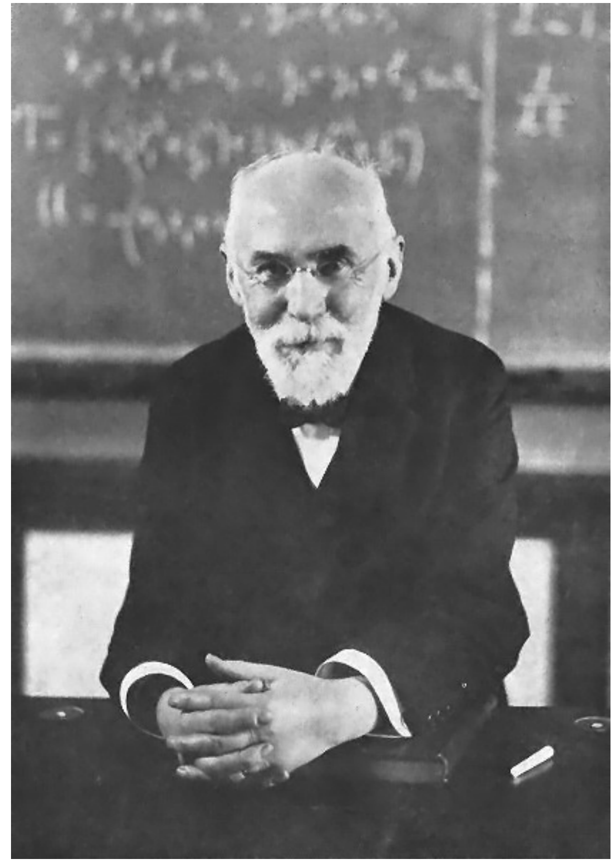
El gas de Lorentz y cuasicristales



Rodrigo Treviño

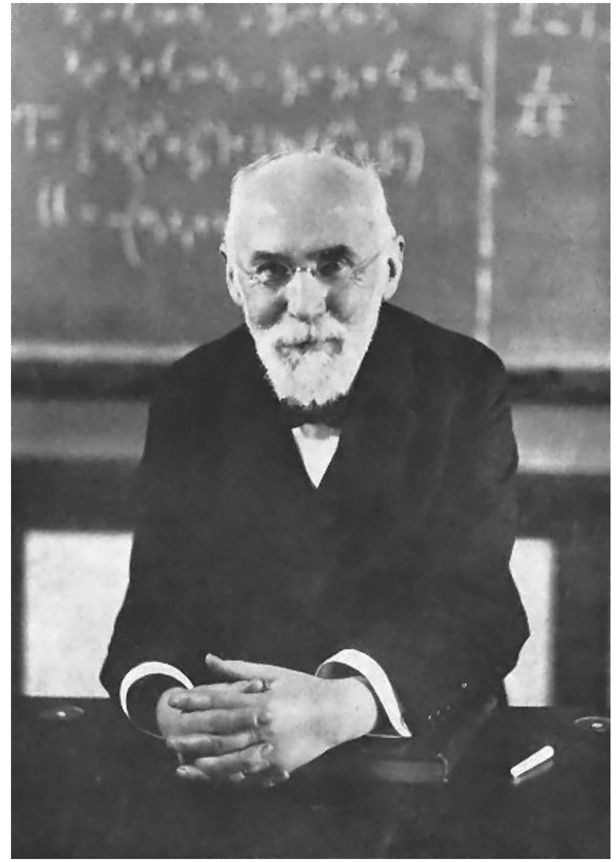
El gas de Lorentz

El gas de Lorentz



El gas de Lorentz

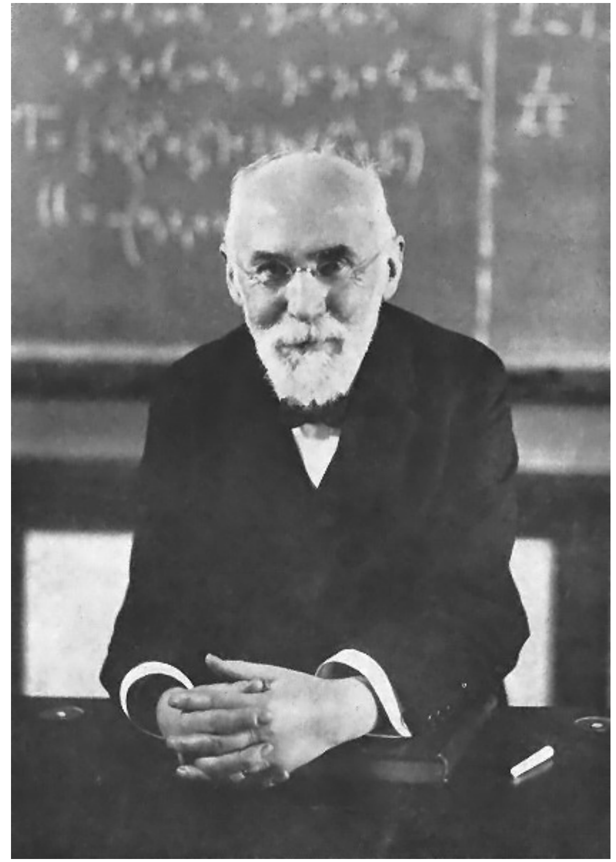
1905: Describe el movimiento de electrones dentro de metales



El gas de Lorentz

1905: Describe el movimiento de electrones dentro de metales

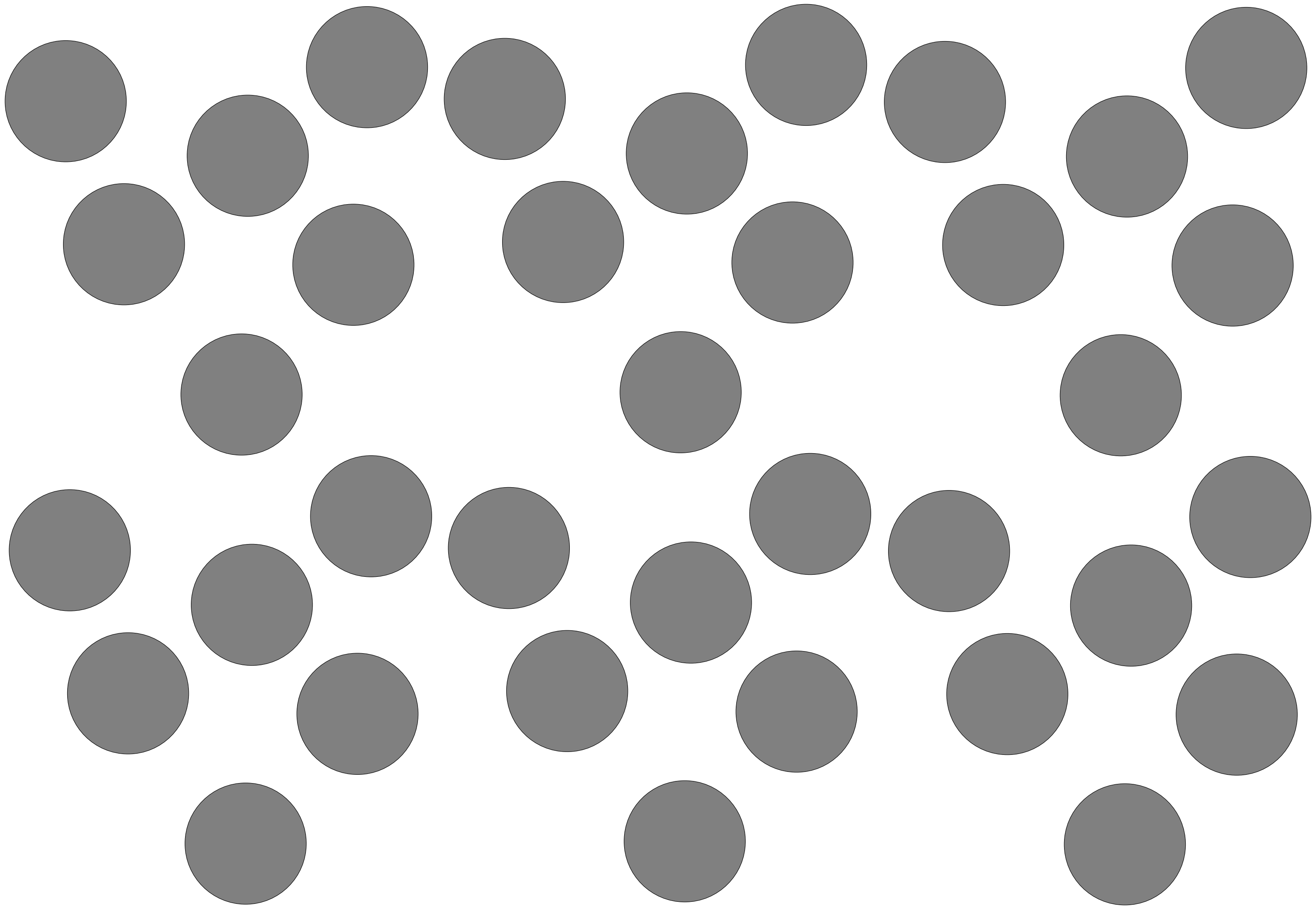
Suponiendo que no interactúan entre ellos, seguimos el movimiento de un electrón

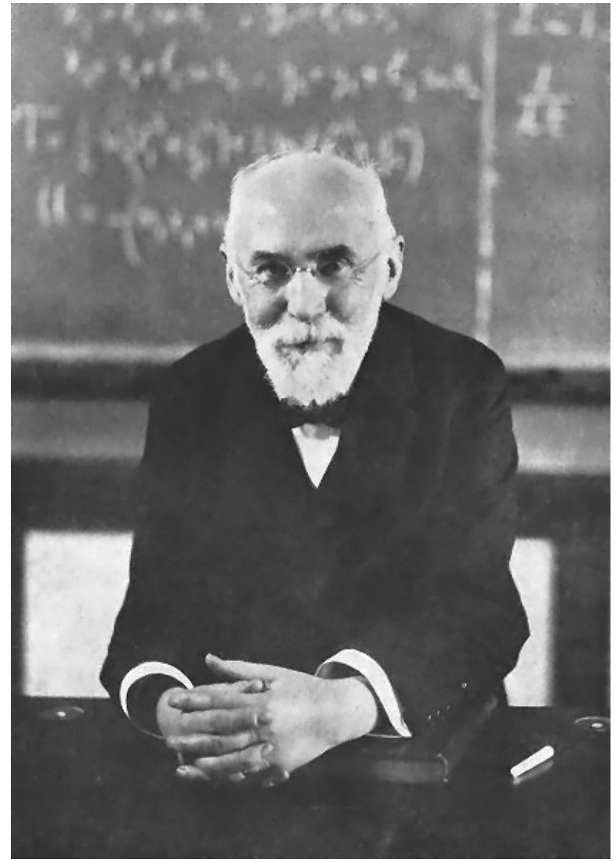


El gas de Lorentz

1905: Describe el movimiento de electrones dentro de metales

Suponiendo que no interactúan entre ellos, seguimos el movimiento de un electrón

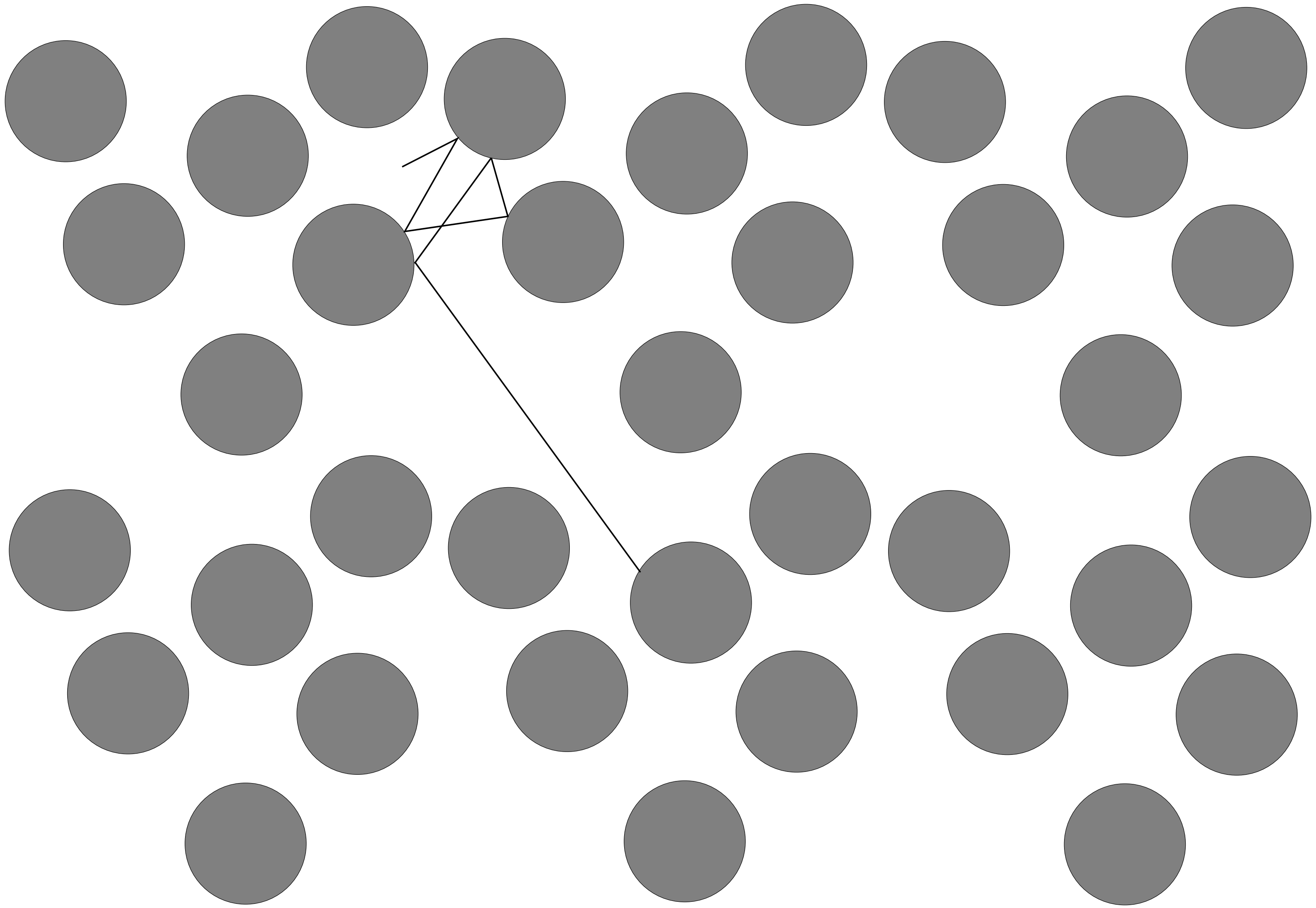


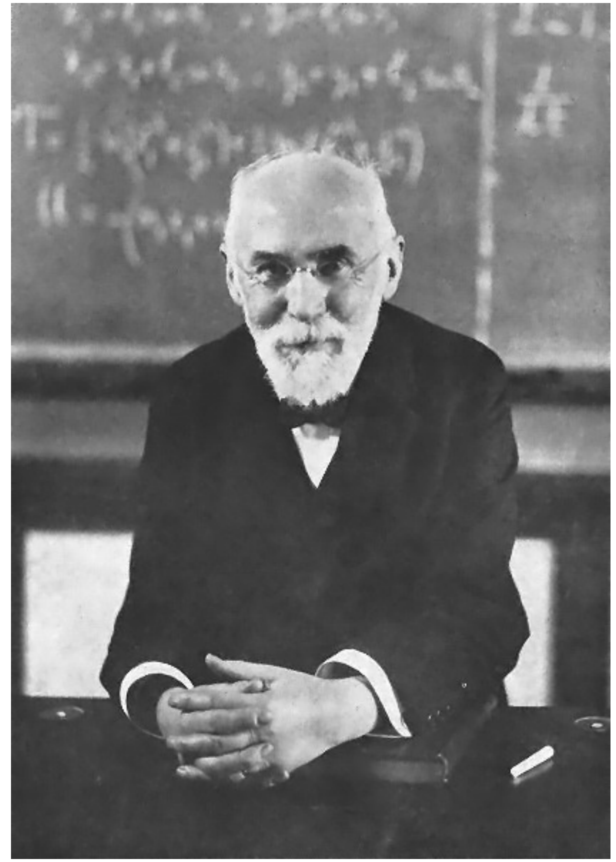


El gas de Lorentz

1905: Describe el movimiento de electrones dentro de metales

Suponiendo que no interactúan entre ellos, seguimos el movimiento de un electrón

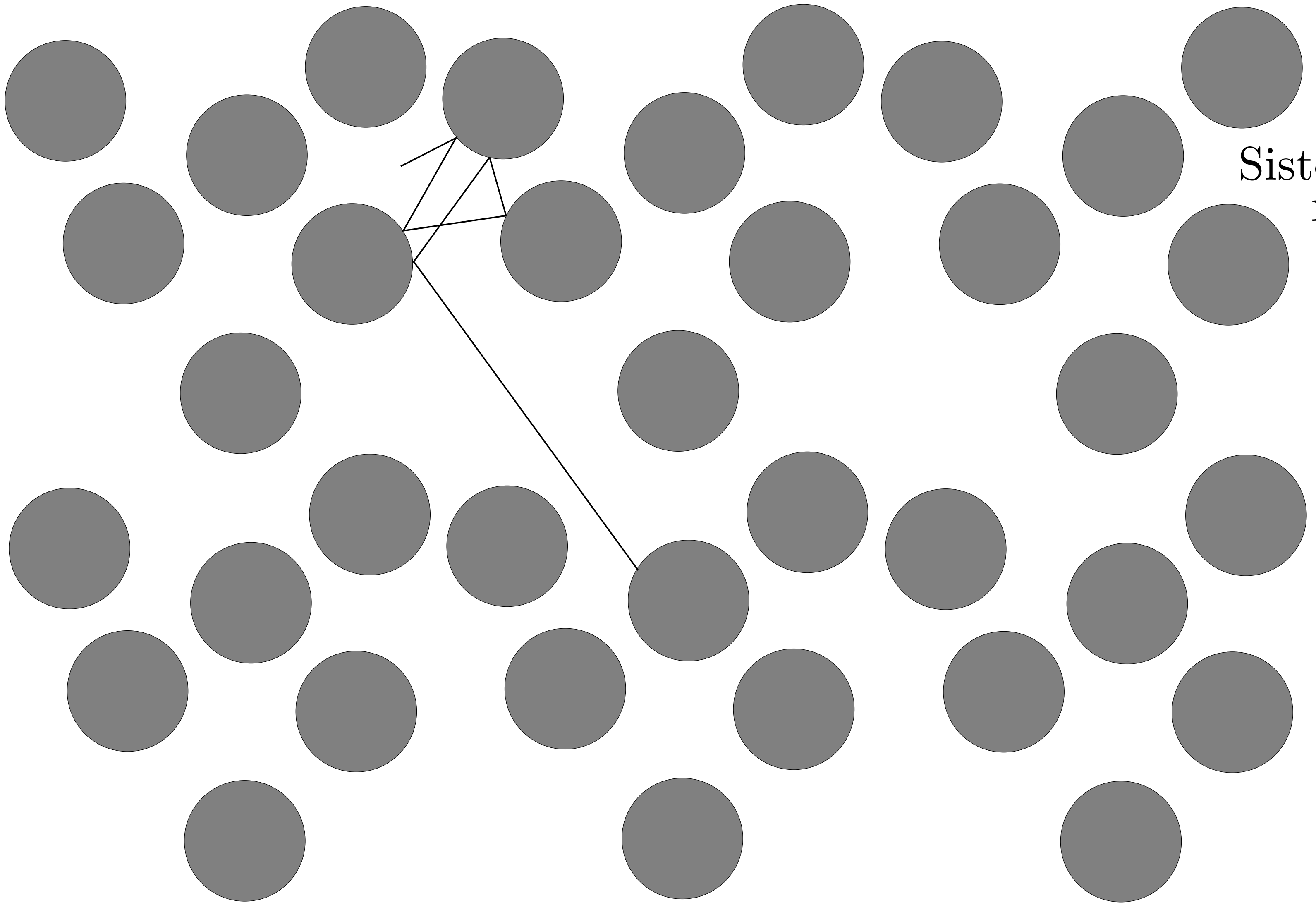




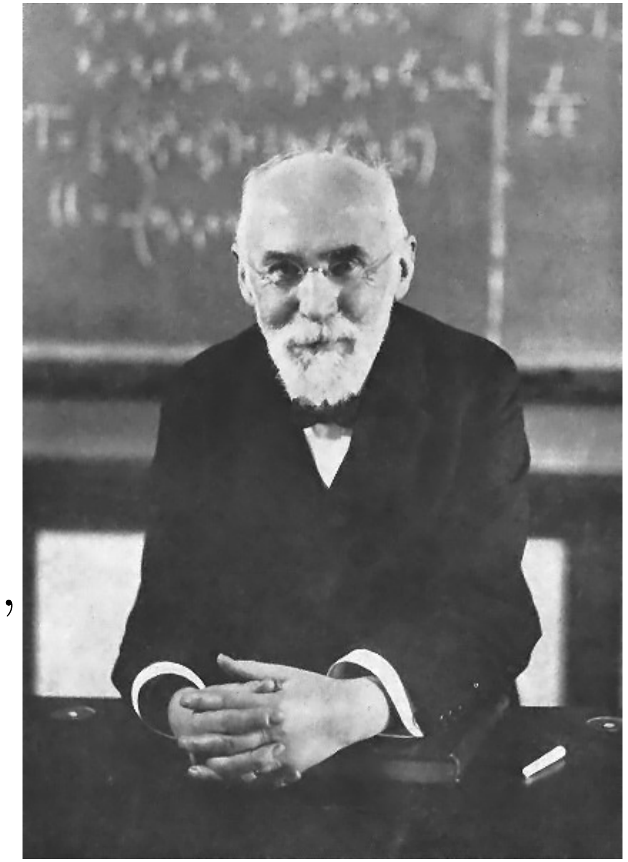
El gas de Lorentz

1905: Describe el movimiento de electrones dentro de metales

Suponiendo que no interactúan entre ellos, seguimos el movimiento de un electrón



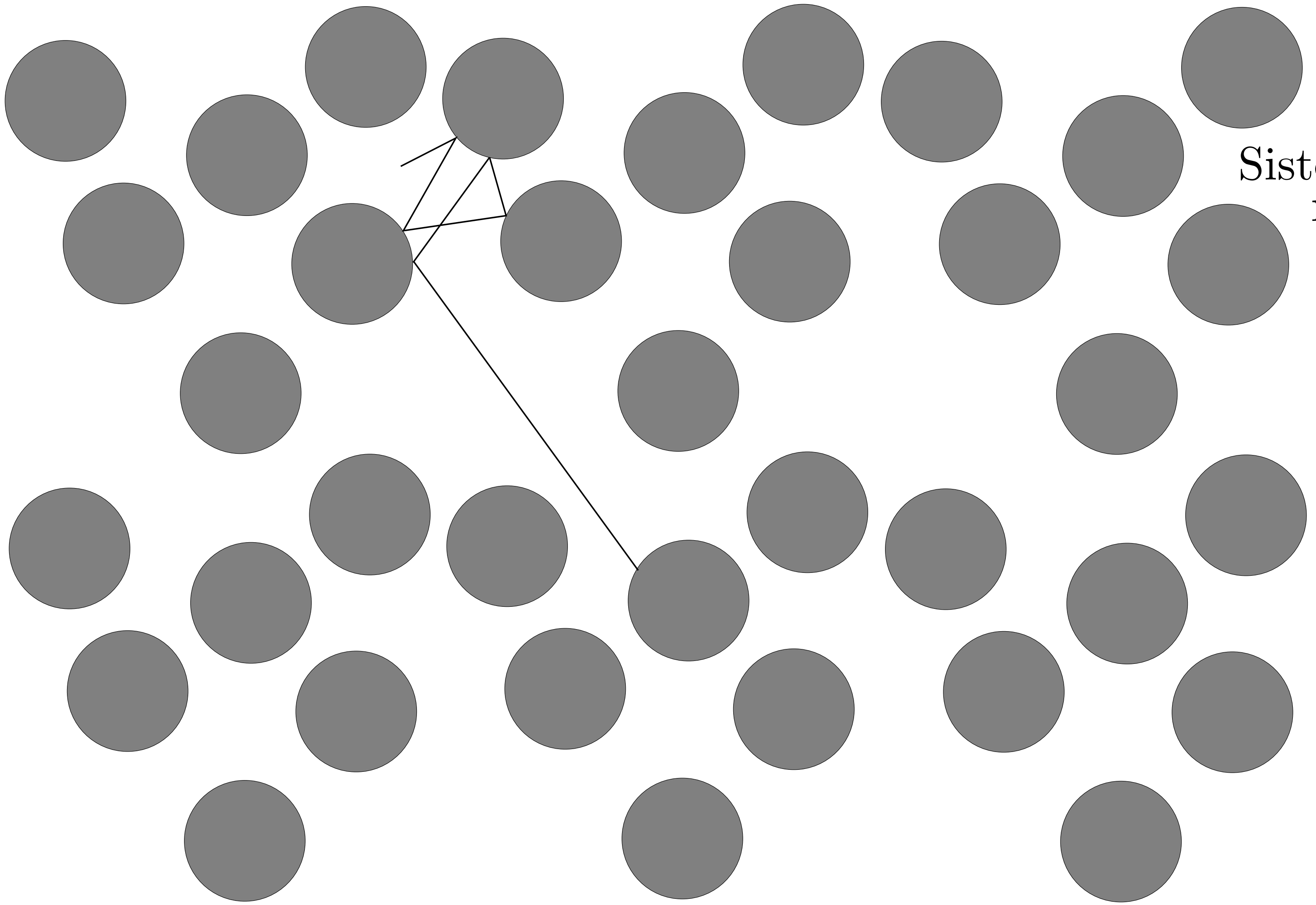
Sistema no compacto,
medida infinita



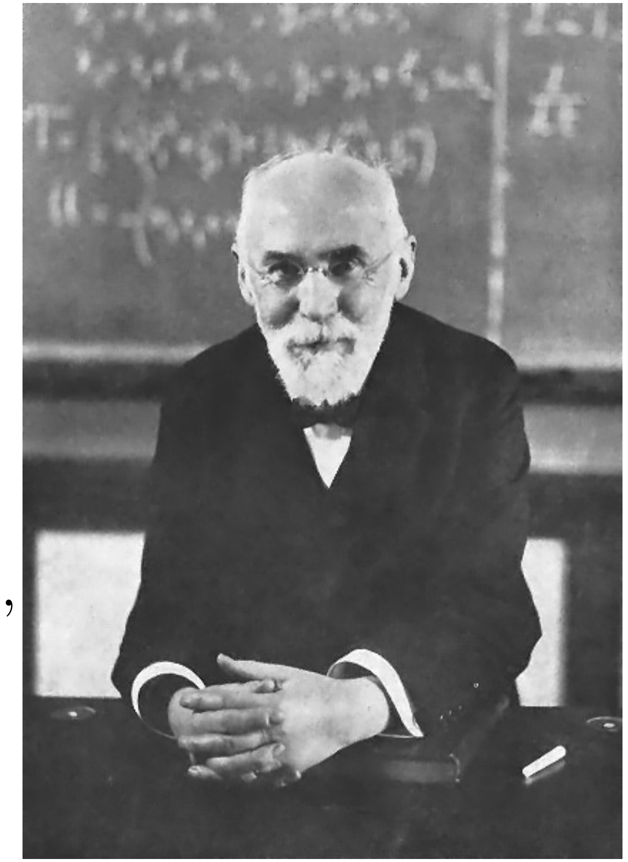
El gas de Lorentz

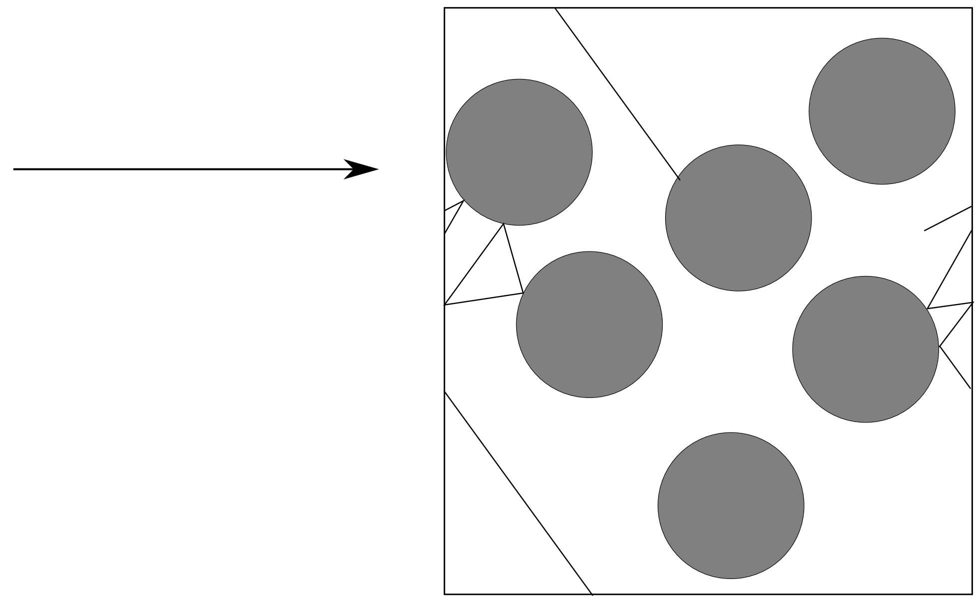
1905: Describe el movimiento de electrones dentro de metales

Suponiendo que no interactúan entre ellos, seguimos el movimiento de un electrón



Sistema no compacto, medida infinita

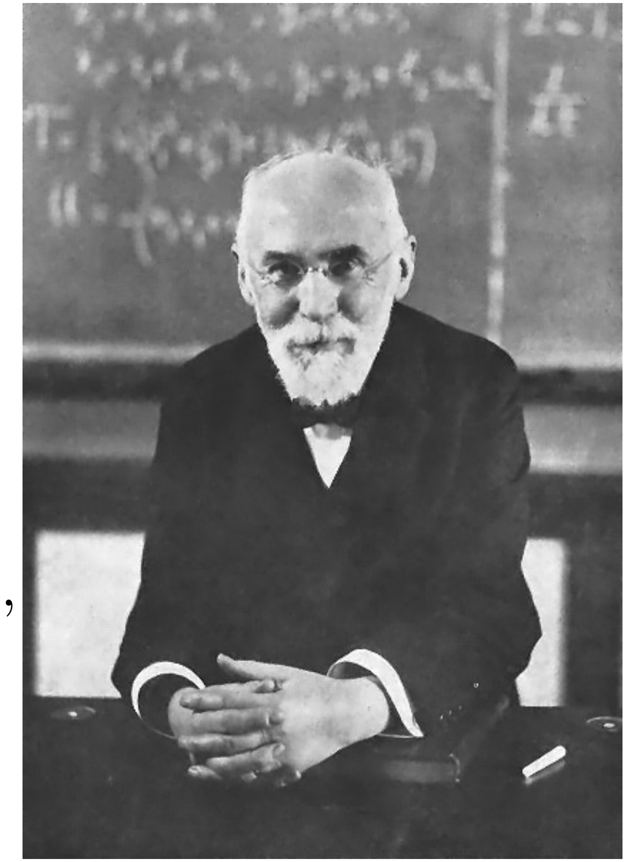


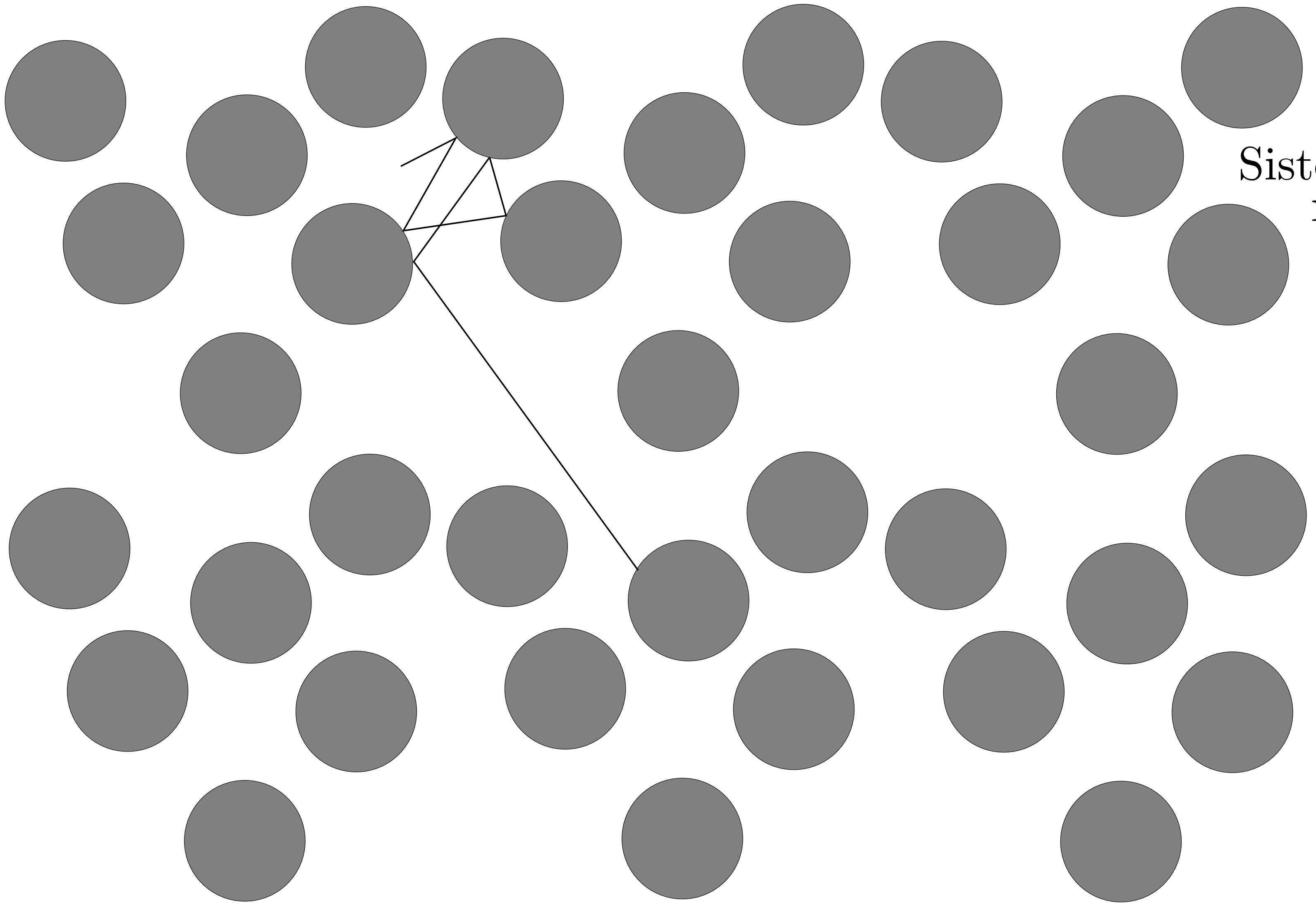


El gas de Lorentz

1905: Describe el movimiento de electrones dentro de metales

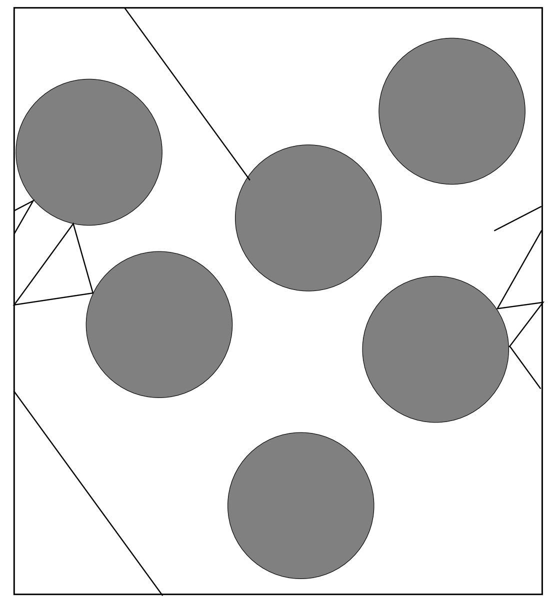
Suponiendo que no interactúan entre ellos, seguimos el movimiento de un electrón





Sistema no compacto,
medida infinita

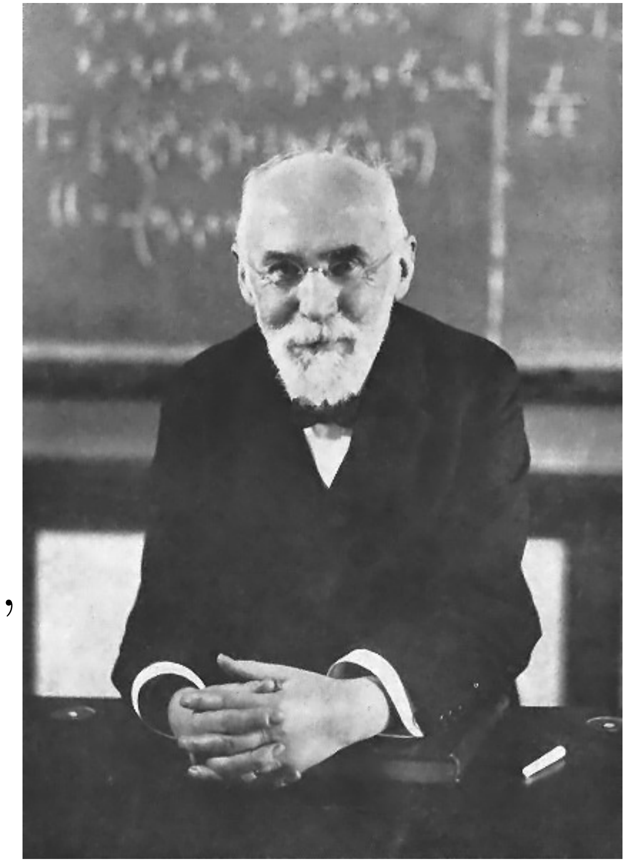
Billar de Sinai

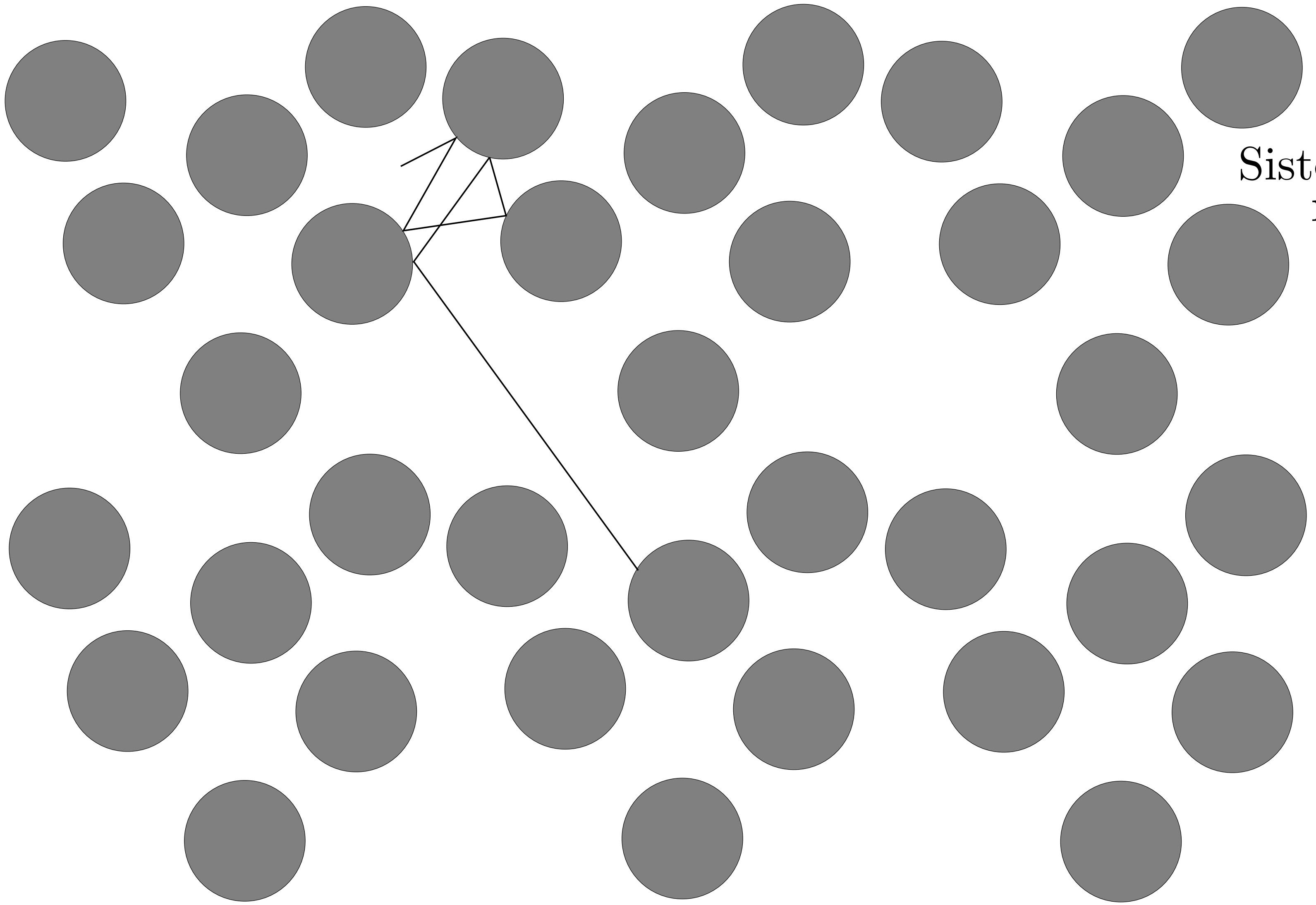


El gas de Lorentz

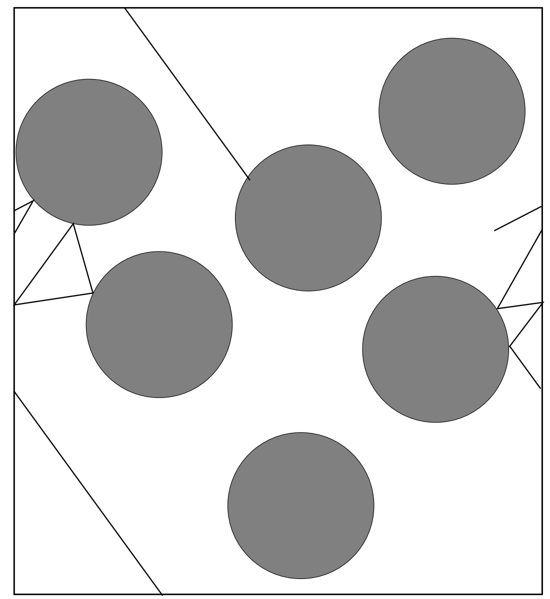
1905: Describe el movimiento de electrones dentro de metales

Suponiendo que no interactúan entre ellos, seguimos el movimiento de un electrón





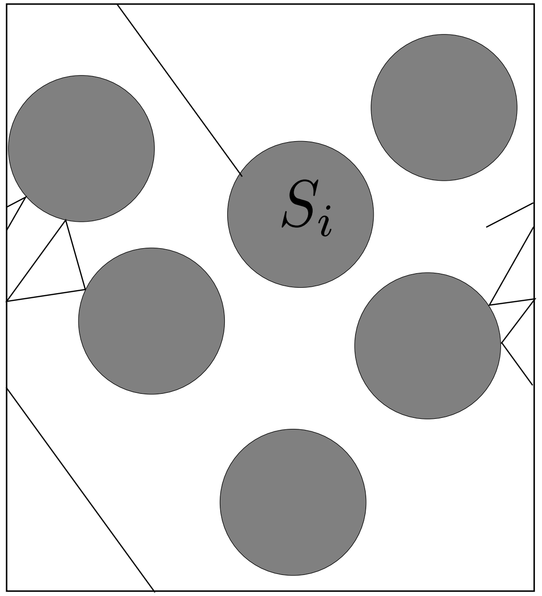
Sistema no compacto,
medida infinita

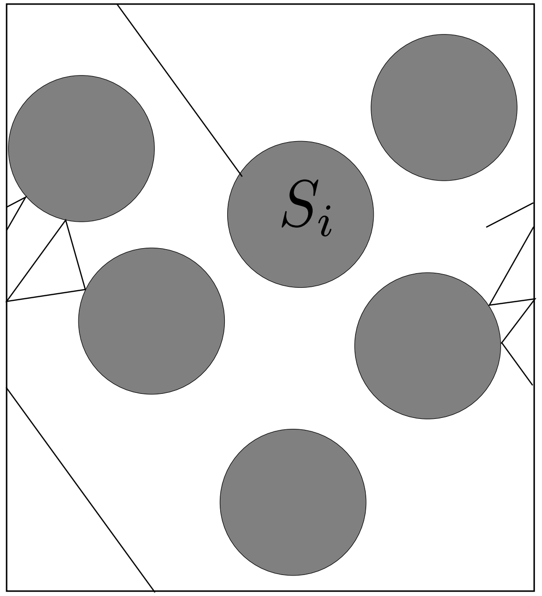


Billar de Sinai
medida finita

Billar de Sinai

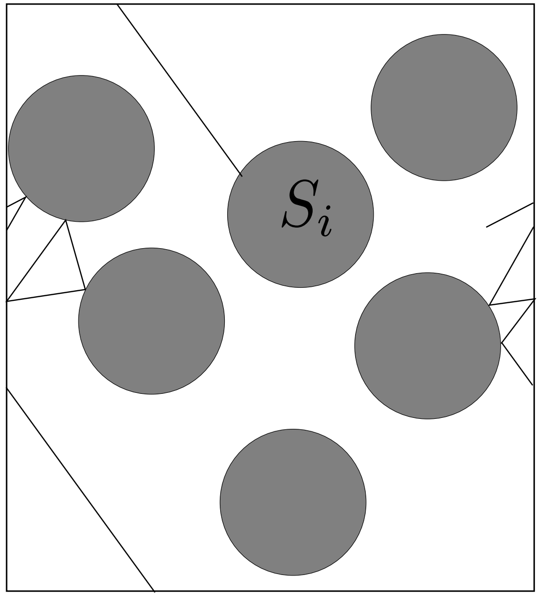
Billar de Sinai





Billar de Sinai

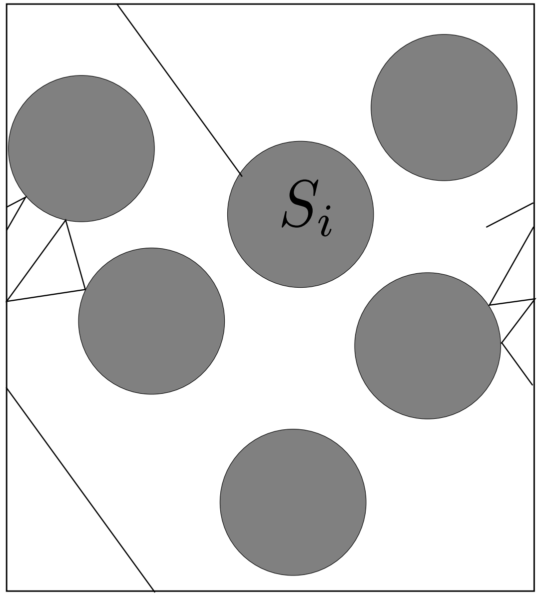
S_i Obstáculos $\Gamma_i = \partial S_i$



Billar de Sinai

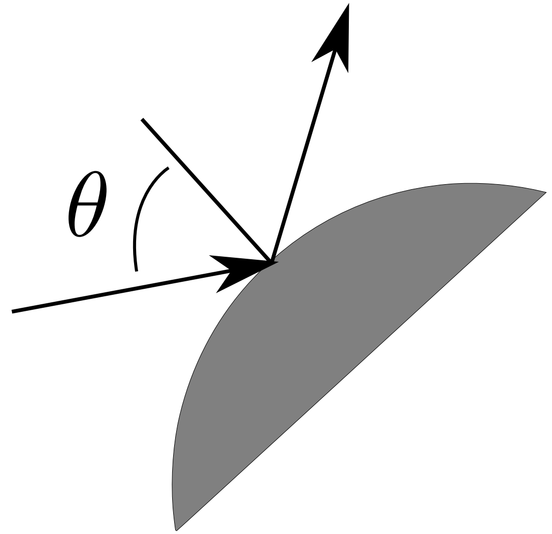
S_i Obstáculos $\Gamma_i = \partial S_i$

$$\bigsqcup \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$$

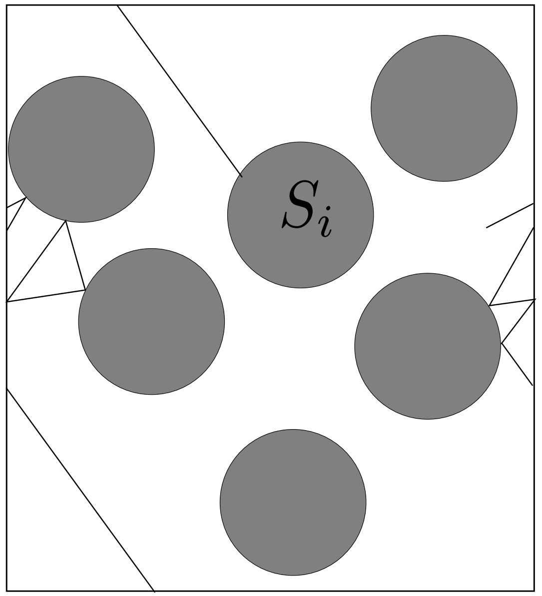


Billar de Sinai

S_i Obstáculos $\Gamma_i = \partial S_i$



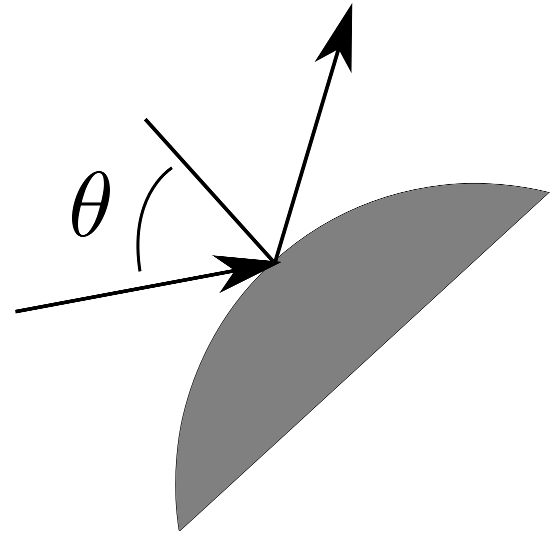
$$\bigsqcup \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$$



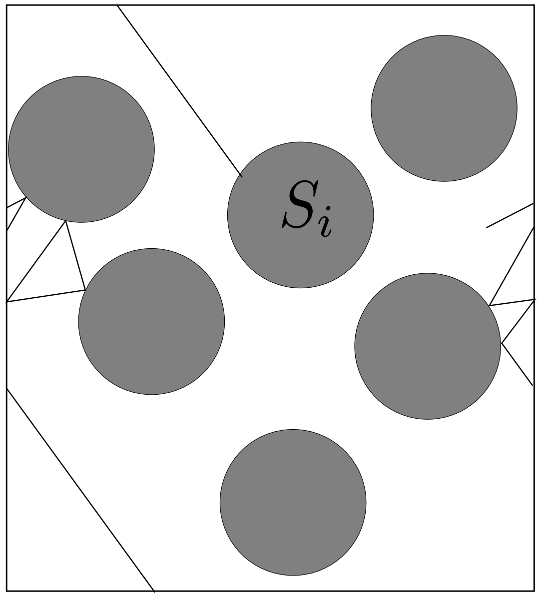
Billar de Sinai

S_i Obstáculos $\Gamma_i = \partial S_i$

$$\mathcal{D} = \bigsqcup \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$$



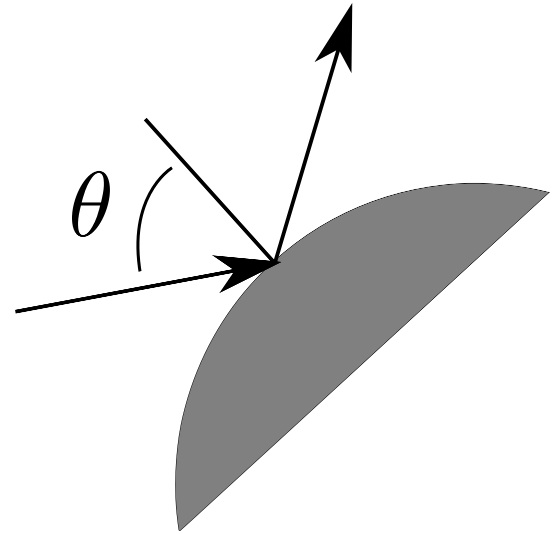
Billar de Sinai

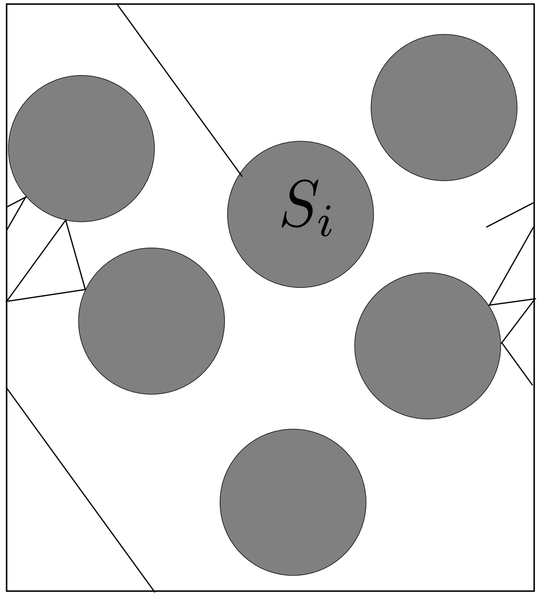


S_i Obstáculos $\Gamma_i = \partial S_i$

$$\mathcal{D} = \bigsqcup \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$$

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$





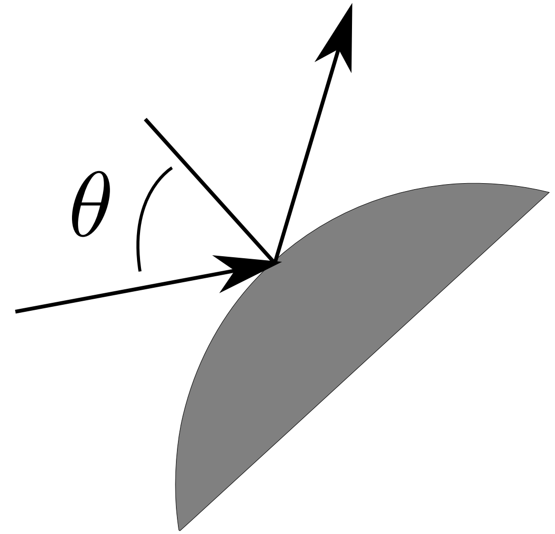
Billar de Sinai

S_i Obstáculos $\Gamma_i = \partial S_i$

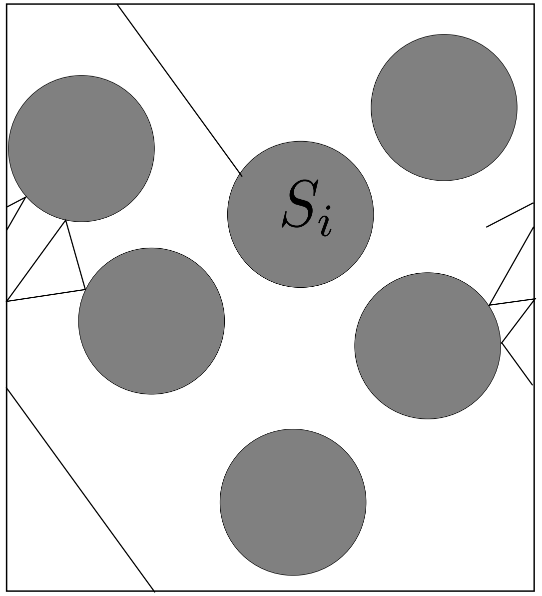
$$\mathcal{D} = \bigsqcup \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$$

Espacio de colisiones

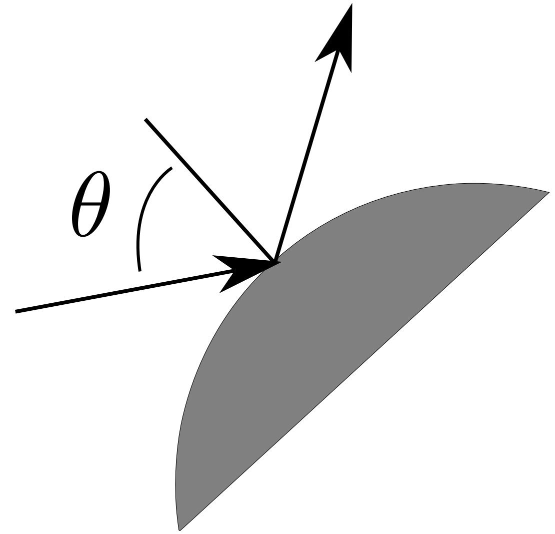
$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$



Billar de Sinai



S_i Obstáculos $\Gamma_i = \partial S_i$



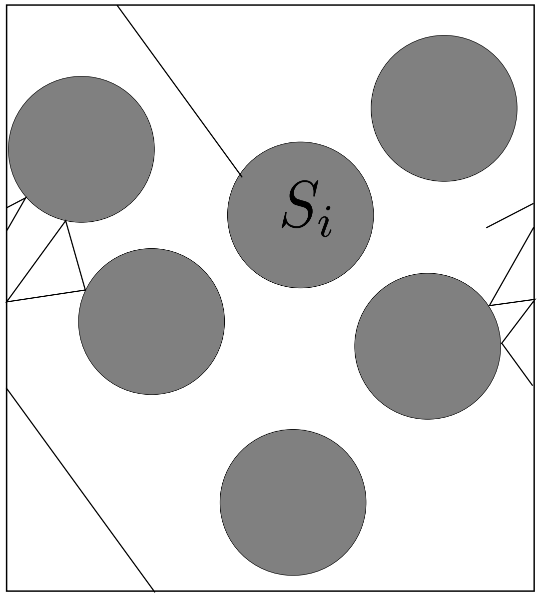
$$\mathcal{D} = \bigsqcup \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$$

Espacio de colisiones

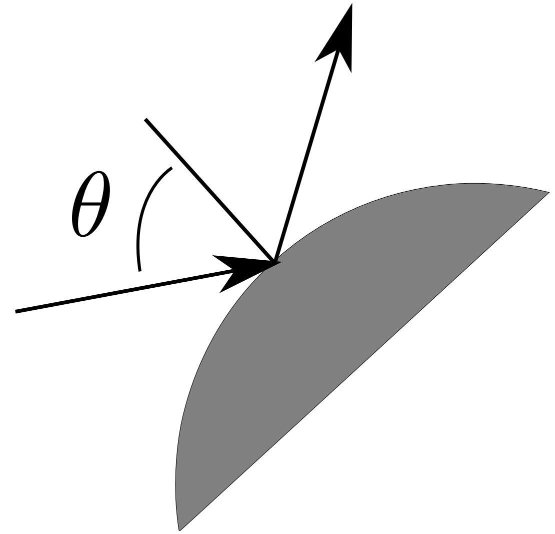
$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

El billard es de **horizonte finito** si el tiempo entre dos colisiones es acotado

Billar de Sinai



S_i Obstáculos $\Gamma_i = \partial S_i$



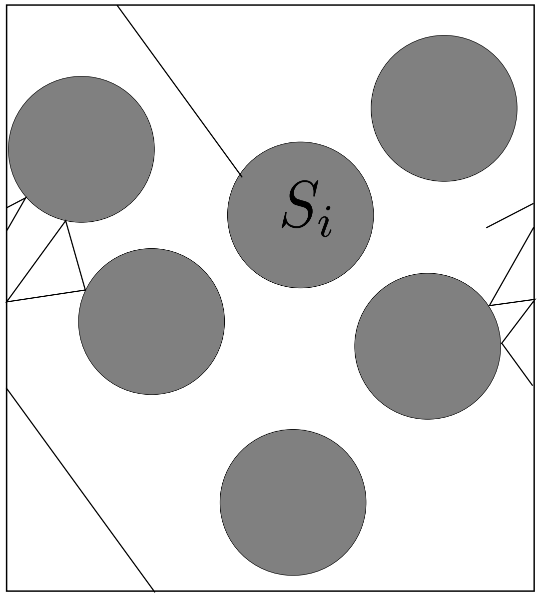
$$\mathcal{D} = \bigsqcup \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$$

Espacio de colisiones

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

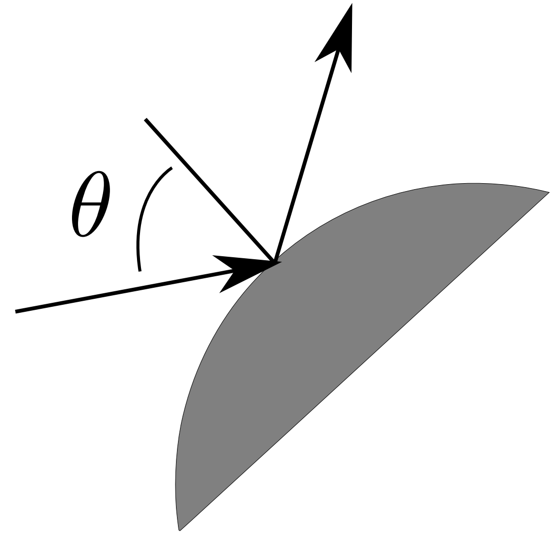
El billard es de **horizonte finito** si el tiempo entre dos colisiones es acotado

Propiedades del billar de Sinai



Billar de Sinai

S_i Obstáculos $\Gamma_i = \partial S_i$



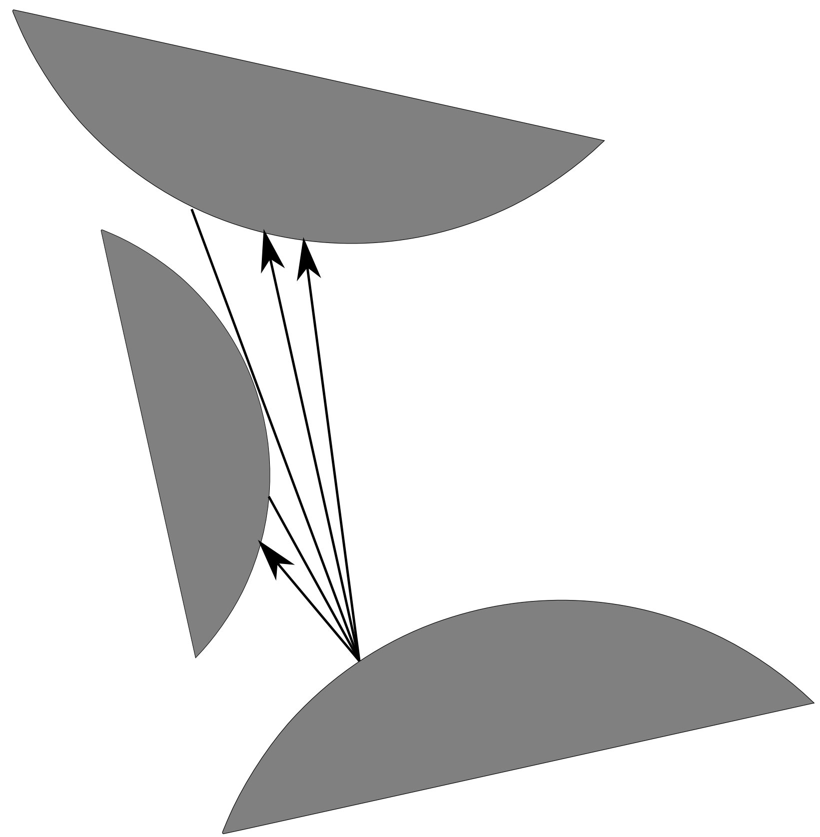
$$\mathcal{D} = \bigsqcup \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$$

Espacio de colisiones

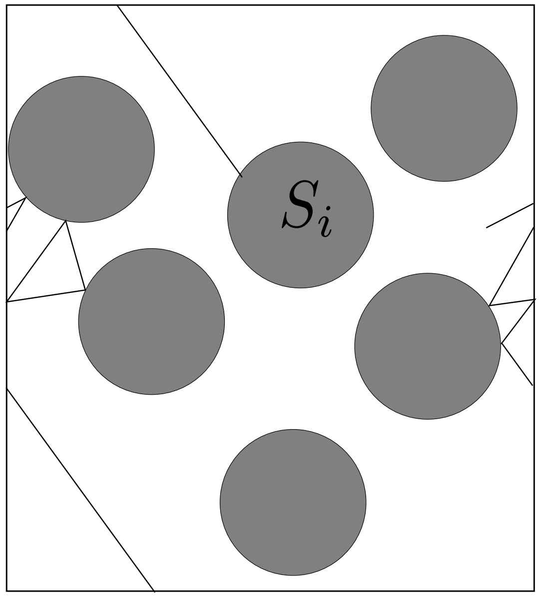
$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

El billard es de **horizonte finito** si el tiempo entre dos colisiones es acotado

Propiedades del billar de Sinai

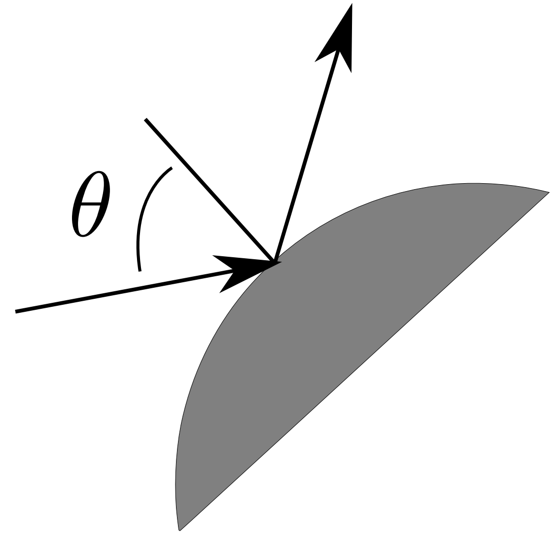


$f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ no es continuo.



Billar de Sinai

S_i Obstáculos $\Gamma_i = \partial S_i$



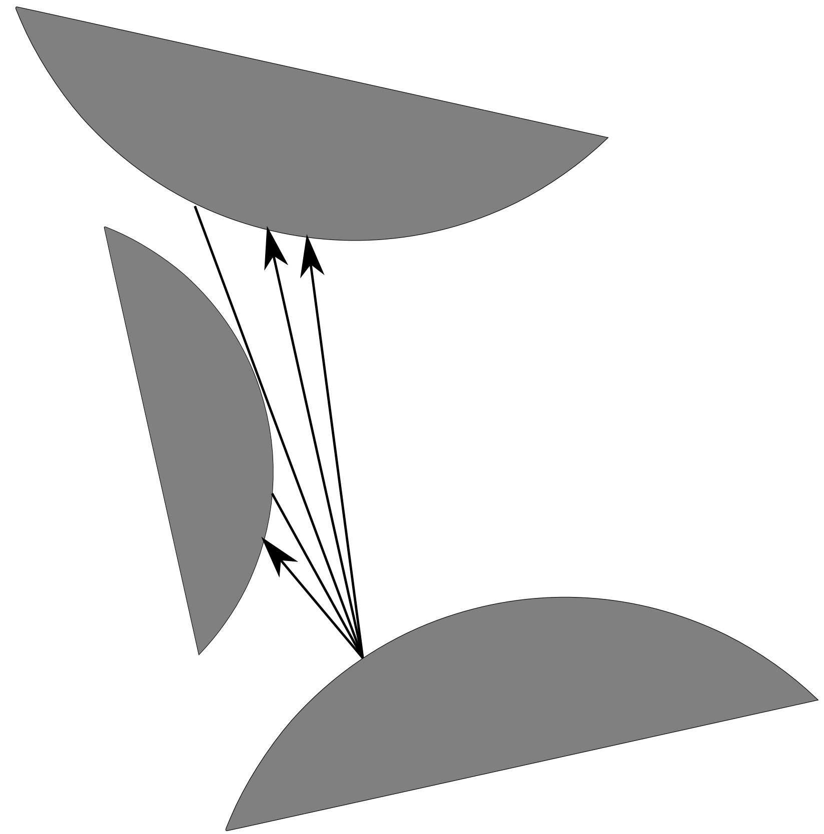
$$\mathcal{D} = \bigsqcup \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$$

Espacio de colisiones

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

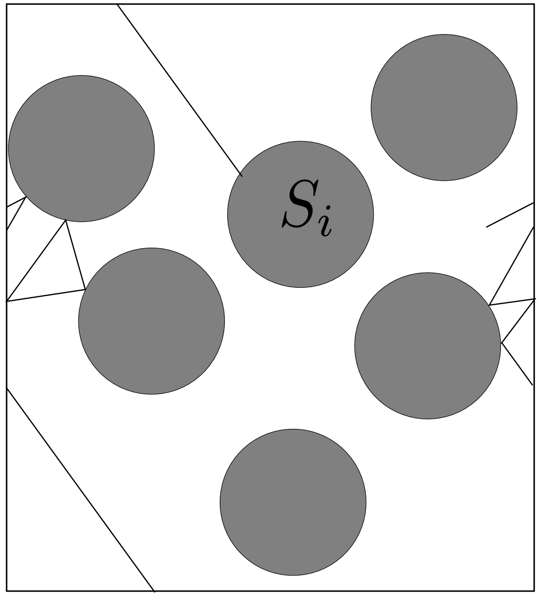
El billard es de **horizonte finito** si el tiempo entre dos colisiones es acotado

Propiedades del billar de Sinai



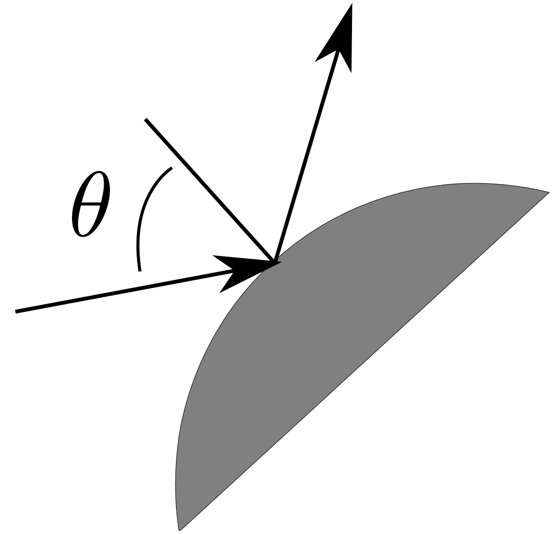
$f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ no es continuo.

f preserva la medida $\text{Leb} \times \cos\theta \, d\theta$



Billar de Sinai

S_i Obstáculos $\Gamma_i = \partial S_i$



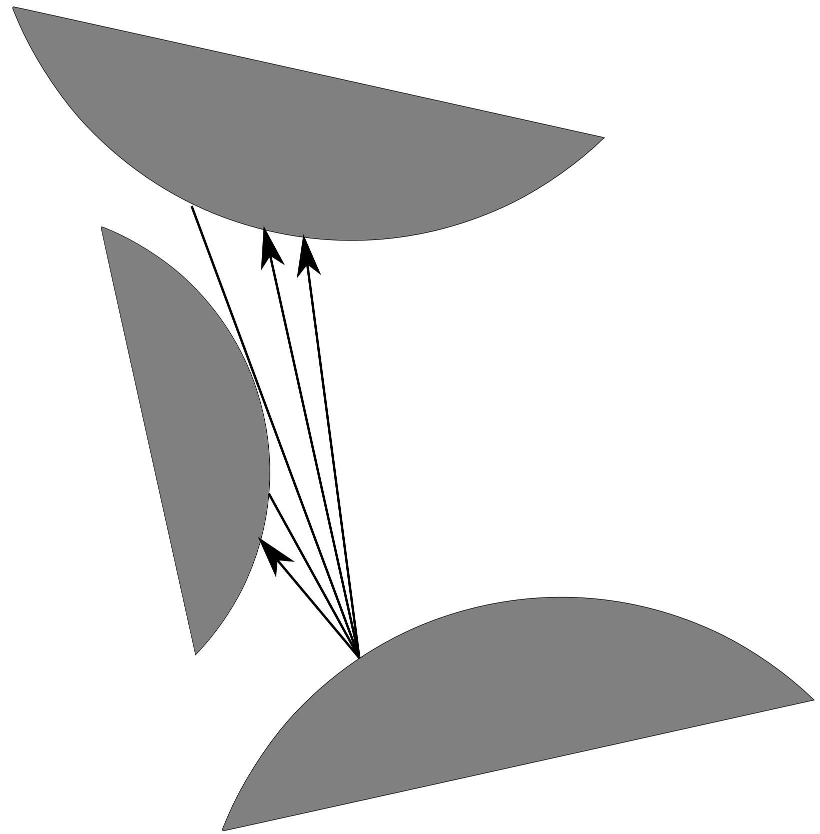
$$\mathcal{D} = \bigsqcup \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$$

Espacio de colisiones

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

El billard es de **horizonte finito** si el tiempo entre dos colisiones es acotado

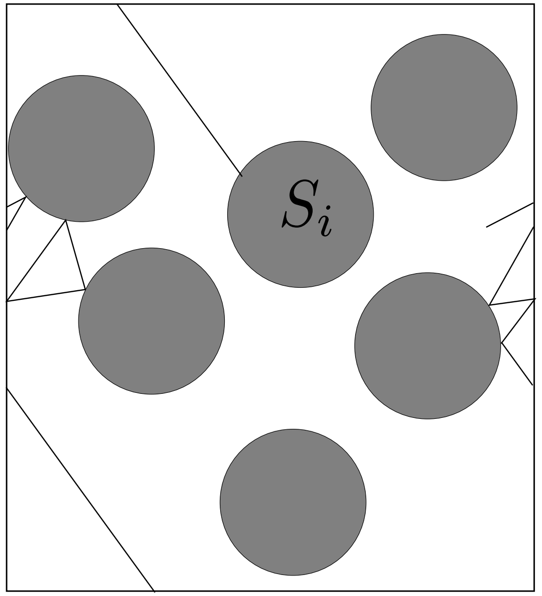
Propiedades del billar de Sinai



$f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ no es continuo.

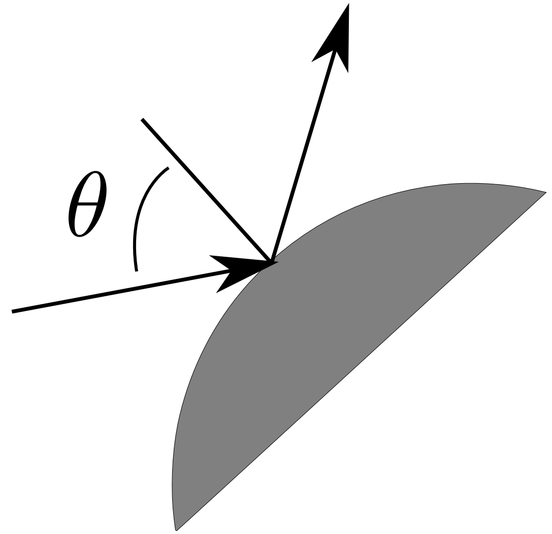
f preserva la medida $\mathrm{Leb} \times \cos\theta \, d\theta$

El conjunto singular es de medida cero



Billar de Sinai

S_i Obstáculos $\Gamma_i = \partial S_i$



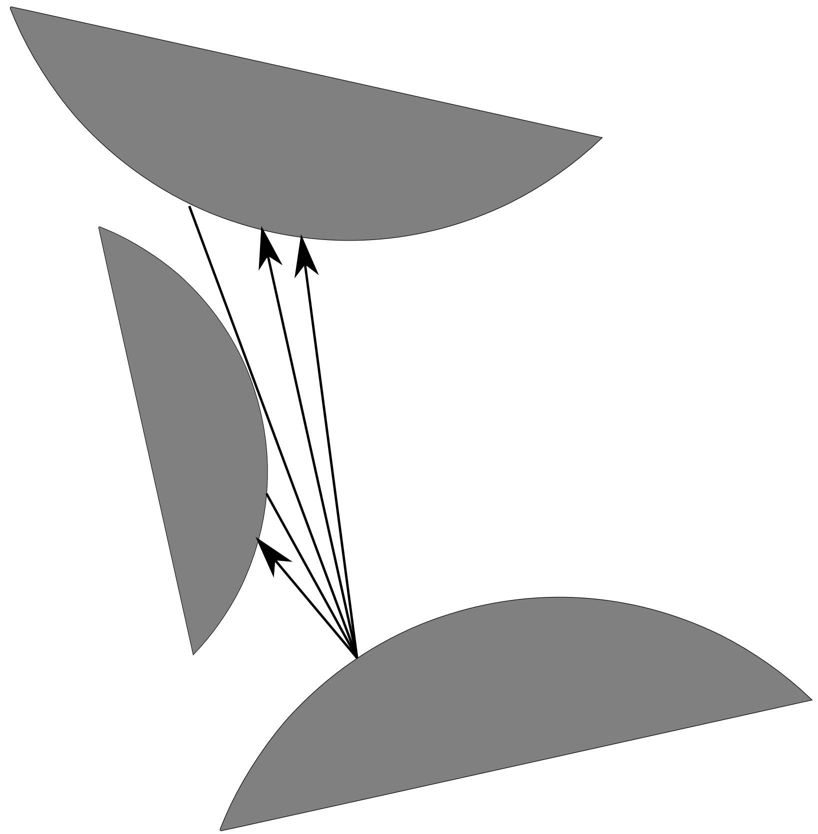
$$\mathcal{D} = \bigsqcup \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$$

Espacio de colisiones

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

El billard es de **horizonte finito** si el tiempo entre dos colisiones es acotado

Propiedades del billar de Sinai



$f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ no es continuo.

f preserva la medida Leb $\times \cos\theta \, d\theta$

El conjunto singular es de medida cero

Es uniformemente hiperbólico

Billar de Sinai

Propiedades estadísticas

Billar de Sinai

Propiedades estadísticas

Ergódico

Billar de Sinai
Propiedades estadísticas

Ergódico

Mezclante (Sinai 1970)

Billar de Sinai
Propiedades estadísticas

Ergódico

Mezclante (Sinai 1970) Velocidad exponencial (Young 1998)

Billar de Sinai
Propiedades estadísticas

Ergódico

Mezclante (Sinai 1970)   Velocidad exponencial (Young 1998)

$$\left| \int_{\bigsqcup \Gamma_i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1 \circ f^n \cdot h_2(x,\theta) \cos\theta \, d\theta \, dx - \mu(h_1)\mu(h_2) \right| \leq C\alpha^n \qquad \alpha \in (0,1)$$

Billar de Sinai
Propiedades estadísticas

Ergódico

Mezclante (Sinai 1970) Velocidad exponencial (Young 1998)

$$\left| \int_{\bigsqcup \Gamma_i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1 \circ f^n \cdot h_2(x,\theta) \cos\theta \, d\theta \, dx - \mu(h_1)\mu(h_2) \right| \leq C\alpha^n \qquad \alpha \in (0,1)$$

Bernoulli

Billar de Sinai
Propiedades estadísticas

Ergódico

Mezclante (Sinai 1970) Velocidad exponencial (Young 1998)

$$\left| \int_{\bigsqcup \Gamma_i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1 \circ f^n \cdot h_2(x,\theta) \cos\theta \, d\theta \, dx - \mu(h_1)\mu(h_2) \right| \leq C\alpha^n \qquad \alpha \in (0,1)$$

Bernoulli

Teorema de límite central

Billar de Sinai
Propiedades estadísticas

Ergódico

Mezclante (Sinai 1970)   Velocidad exponencial (Young 1998)

$$\left| \int_{\bigsqcup \Gamma_i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1 \circ f^n \cdot h_2(x,\theta) \cos\theta \, d\theta \, dx - \mu(h_1)\mu(h_2) \right| \leq C\alpha^n \qquad \alpha \in (0,1)$$

Bernoulli

Teorema de límite central

Desde el punto de vista macroscópico, el gas de Lorentz se comporta como un camino aleatorio

Billar de Sinai
Propiedades estadísticas

Ergódico

Mezclante (Sinai 1970) Velocidad exponencial (Young 1998)

$$\left| \int_{\bigsqcup \Gamma_i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1 \circ f^n \cdot h_2(x,\theta) \cos\theta \, d\theta \, dx - \mu(h_1)\mu(h_2) \right| \leq C\alpha^n \qquad \alpha \in (0,1)$$

Bernoulli

Teorema de límite central

Desde el punto de vista macroscópico, el gas de Lorentz se comporta como un camino aleatorio

¿Qué es un cristal?

Z. Kristallogr. **222** (2007) 308–309 / **DOI** 10.1524/zkri.2007.222.6.308

Discussion

What is a crystal? Introductory remarks to an ongoing discussion

What is a crystal? What a strange question, you may think, because there is a nice definition in the *International Tables for Crystallography, Vol. A*. In chapter 8.1 *Basic concepts*, you will find the following:

> *"Crystals are finite real objects in physical space which may be idealized by infinite three-dimensional periodic crystal structures in point space. Three-dimensional periodicity means that there are translations among the symmetry operations of the object with the translation vectors spanning a three-dimensional space. Extending this concept of crystal structure to more general periodic objects and to n-dimensional space, one obtains the following definition:*
> *Definition: An object in n-dimensional point space E^n is called an n-dimensional crystallographic pattern or, for short, crystal pattern if among its symmetry operations*
> *(i) there are n translations, the translation vectors $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$ of which are linearly independent,*
> *(ii) all translation vectors, except the zero vector $\boldsymbol{o}$, have a length of at least $d > 0$.*
> *Condition (i) guarantees the n-dimensional periodicity and thus excludes subperiodic symmetries like layer groups, rod groups and frieze groups. Condition (ii) takes into account the finite size of atoms in actual crystals"*

This concept allows to describe a *real crystal* by comparing it with the model of an *ideal crystal*. In the following I list some terms used for the description of real crystals or their idealized models:

Ideal crystal: infinite mathematical object with an idealized crystal structure; an *ideal crystal* can be *ordered* or *disordered*, if it is *disordered*, it is not *periodic*

¿Qué es un cristal?

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Cristalografía moderna: Difracción de rayos X

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Cristalografía moderna: Difracción de rayos X

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Cristalografía moderna: Difracción de rayos X

Teorema de restricción cristalográfica:

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Cristalografía moderna: Difracción de rayos X

Teorema de restricción cristalográfica: Las simetrías rotacionales de un cristal solo pueden tener orden 2, 3, 4 y 6.

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Cristalografía moderna: Difracción de rayos X

Teorema de restricción cristalográfica: Las simetrías rotacionales de un cristal solo pueden tener orden 2, 3, 4 y 6.

(Con estructura perdiódica)

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Cristalografía moderna: Difracción de rayos X

Teorema de restricción cristalográfica: Las simetrías rotacionales de un cristal solo pueden tener orden 2, 3, 4 y 6.

(Con estructura perdiódica)

Cualquier simetría se detecta en el patrón de difracción

¿Qué es un cristal?

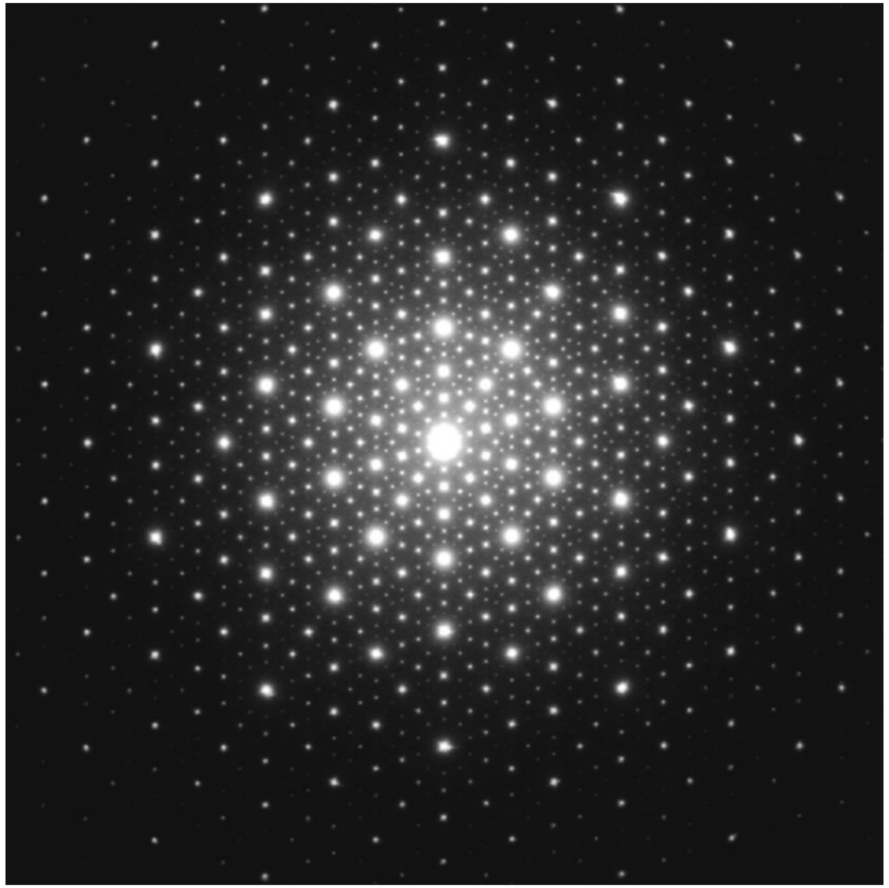
Un material con estructura cristalina

Dan Shechtman (1980)

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

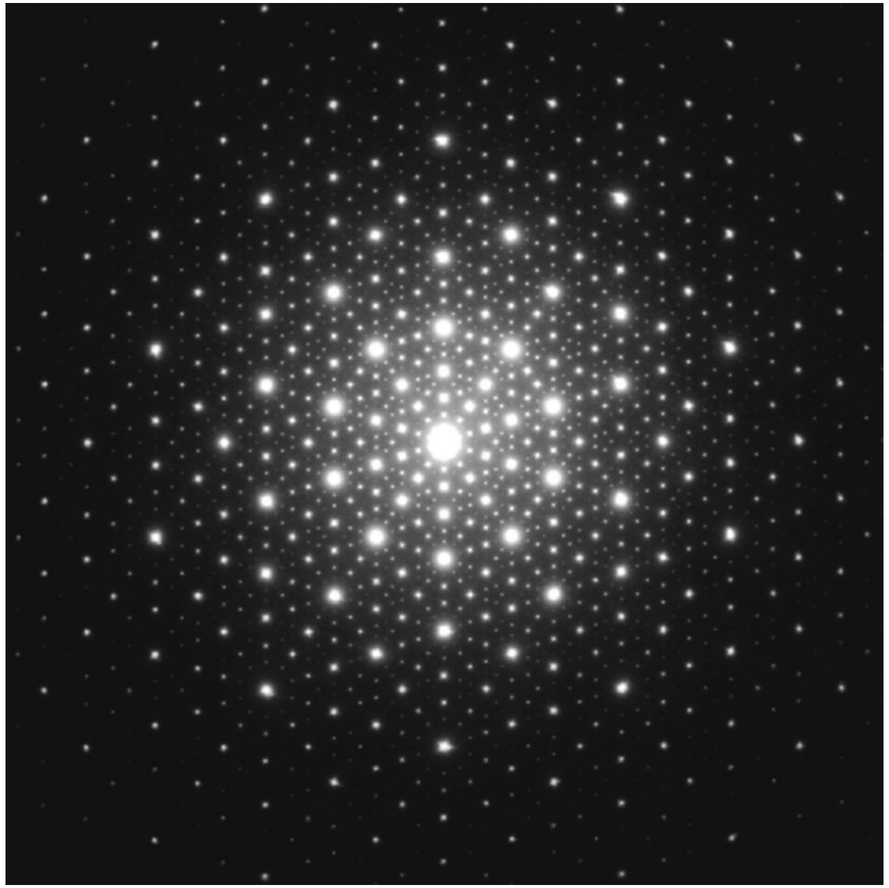
Dan Shechtman (1980)



¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Dan Shechtman (1980)

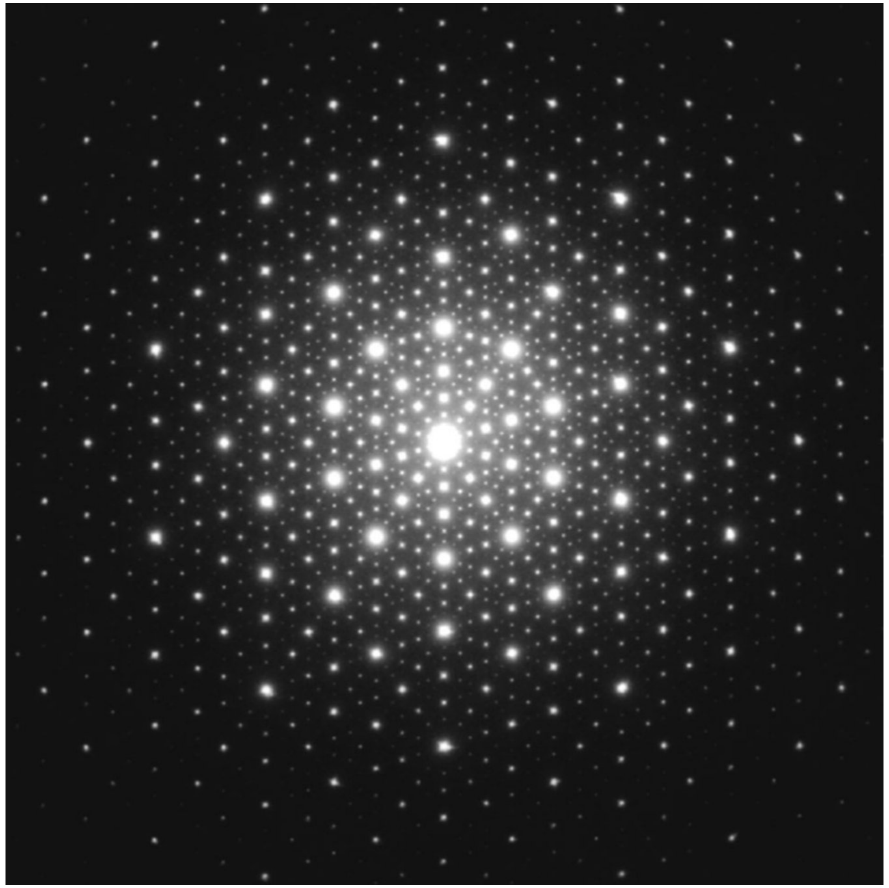


Lo sobresaliente

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Dan Shechtman (1980)



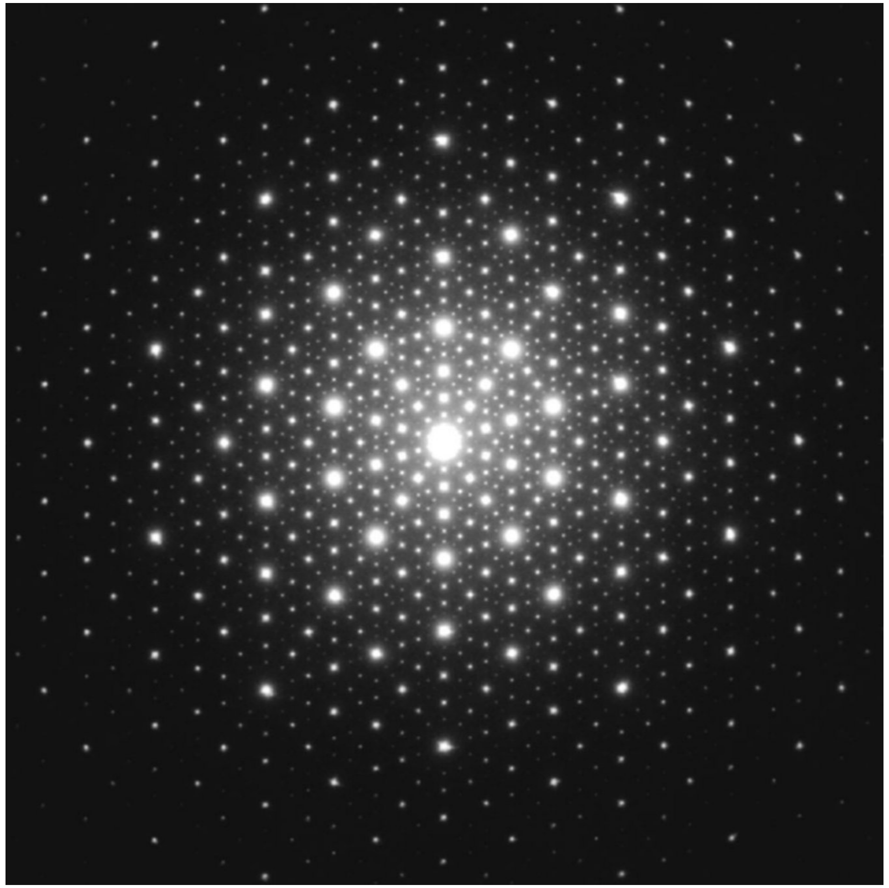
Lo sobresaliente

1) Simetrías de orden 5 a 10 $\Rightarrow$ estructura no periódica

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Dan Shechtman (1980)



Lo sobresaliente

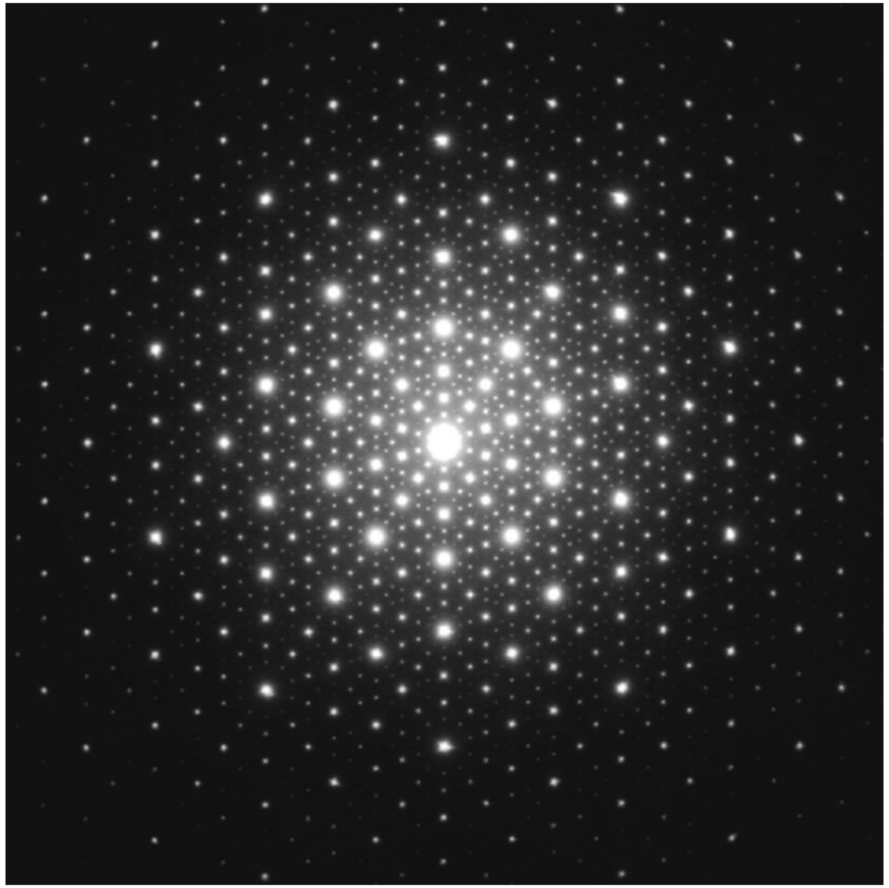
1) Simetrías de orden 5 a 10 $\Rightarrow$ estructura no periódica

2) Picos discretos $\Rightarrow$ estructura ordenada

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Dan Shechtman (1980)



Lo sobresaliente

1) Simetrías de orden 5 a 10 $\Rightarrow$ estructura no periódica

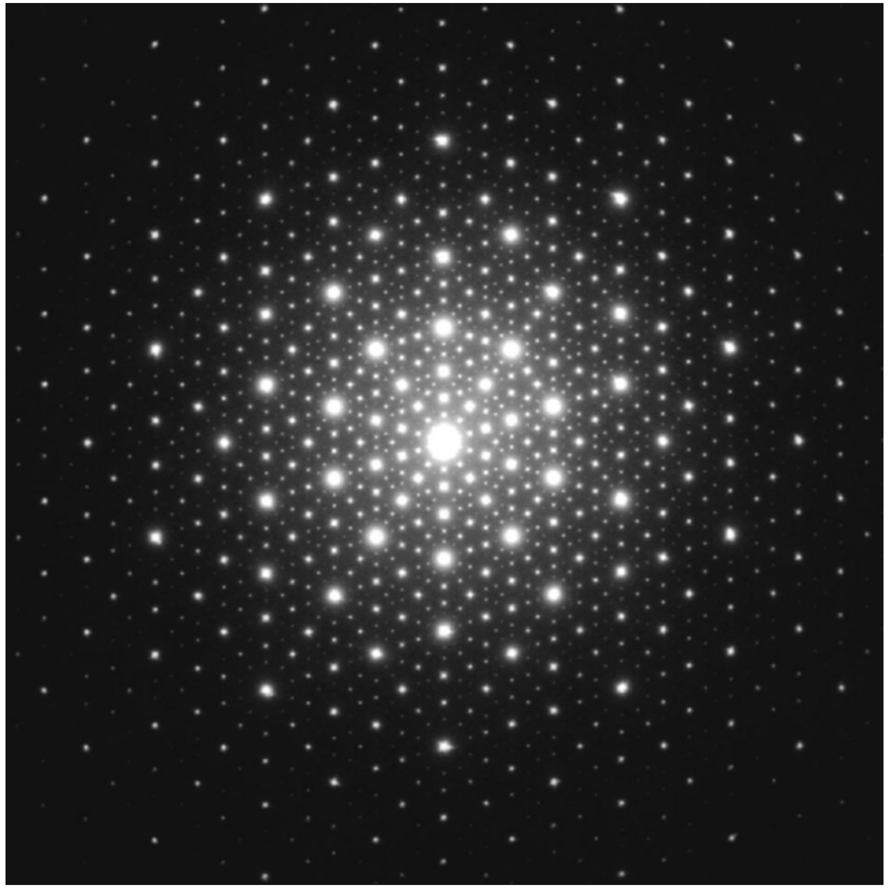
2) Picos discretos $\Rightarrow$ estructura ordenada

Cuasicristal

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Dan Shechtman (1980)



Premio Nobel de Química 2011

Lo sobresaliente

1) Simetrías de orden 5 a 10 $\Rightarrow$ estructura no periódica

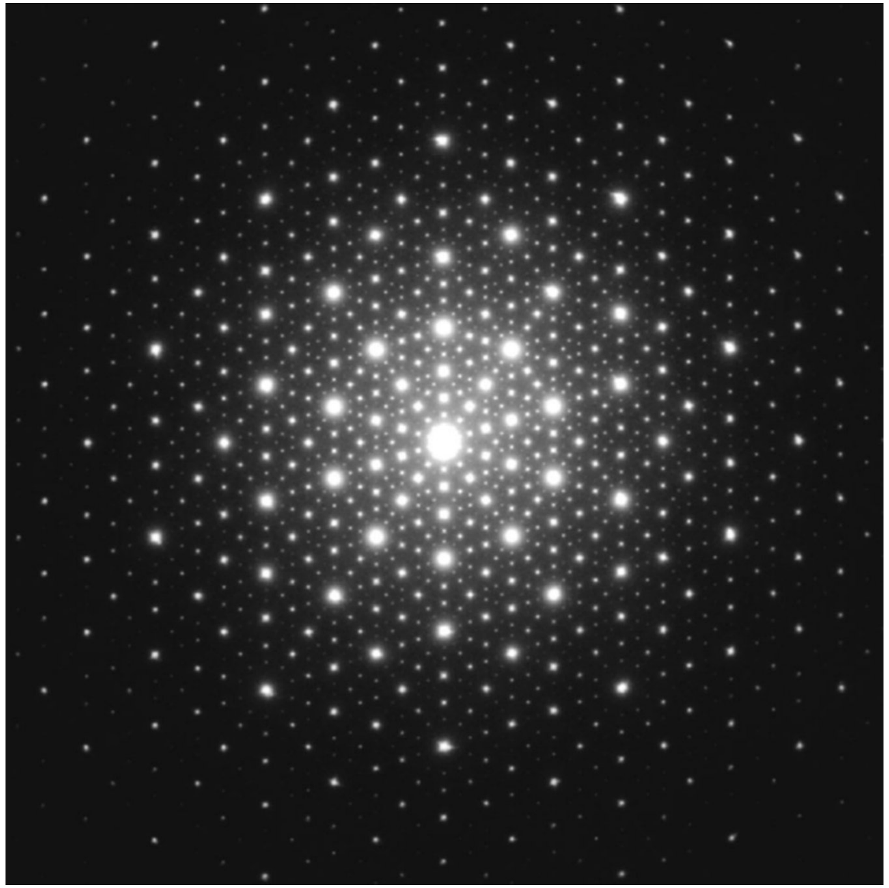
2) Picos discretos $\Rightarrow$ estructura ordenada

Cuasicristal

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Dan Shechtman (1980)



Premio Nobel de Química 2011

Lo sobresaliente

1) Simetrías de orden 5 a 10 $\Rightarrow$ estructura no periódica

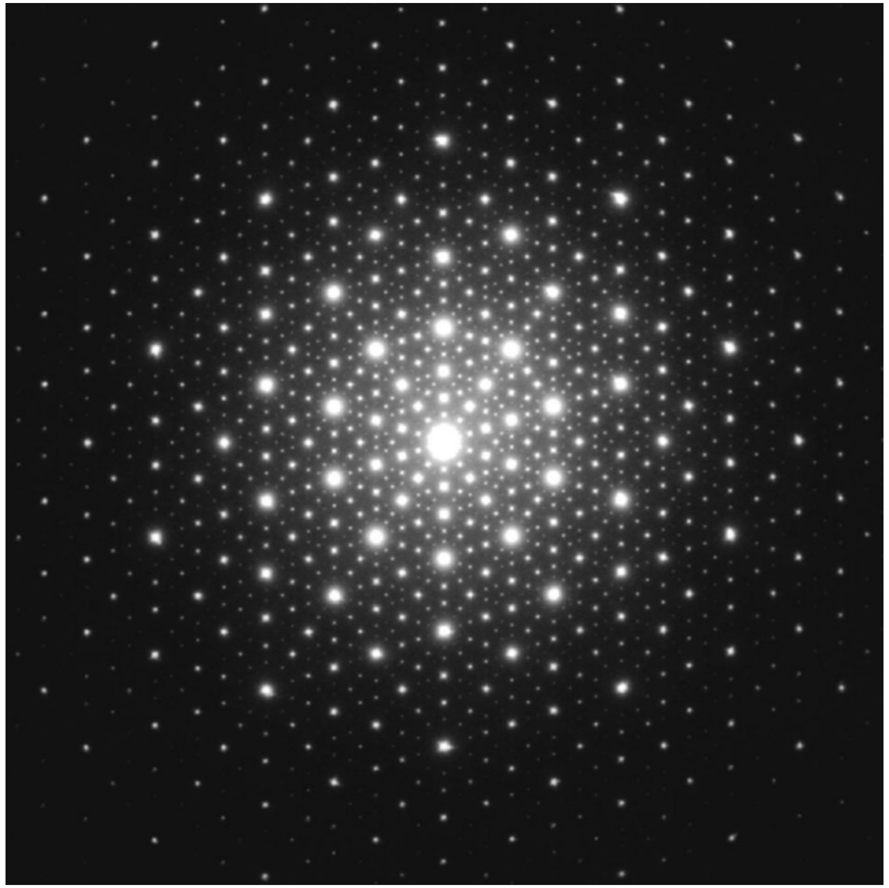
2) Picos discretos $\Rightarrow$ estructura ordenada

Cuasicristal

¿Qué es un cristal?

Un material con estructura cristalina

Dan Shechtman (1980)



Premio Nobel de Química 2011

Lo sobresaliente

1) Simetrías de orden 5 a 10 $\Rightarrow$ estructura no periódica

2) Picos discretos $\Rightarrow$ estructura ordenada

Cuasicristal

¿Cómo se modelan estos materiales?

NewScientist

Nobel prizewinning quasicrystal fell from space

SPACE 3 January 2012

By David Shiga

It came from outer space
(Image: Luca Bindi and Paul Steinhardt)

A Nobel prizewinning crystal has just got alien status. It now seems that the only known sample of a naturally occurring quasicrystal fell from space, changing our understanding of the conditions needed for these curious structures to form.

Quasicrystals are orderly, like conventional crystals, but have a more complex form of symmetry. Patterns echoing this symmetry have been used in art for centuries but materials with this kind of order on the atomic scale were not discovered until the 1980s.

NEWSLETTERS
Sign up to read our regular email newsletters

NewScientist

News Podcasts Video Technology Space Physics Health More Shop Courses Events

Nobel prizewinning quasicrystal fell from space

SPACE 3 January 2012

By David Shiga

It came from outer space
(Image: Luca Bindi and Paul Steinhardt)

A Nobel prizewinning crystal has just got alien status. It now seems that the only known sample of a naturally occurring quasicrystal fell from space, changing our understanding of the conditions needed for these curious structures to form.

Quasicrystals are orderly, like conventional crystals, but have a more complex form of symmetry. Patterns echoing this symmetry have been used in art for centuries but materials with this kind of order on the atomic scale were not discovered until the 1980s.

physicsworld

telescopes and space missions

TELESCOPES AND SPACE MISSIONS | RESEARCH UPDATE

Further proof of extraterrestrial origin of quasicrystals

13 Aug 2012

Embaldosados

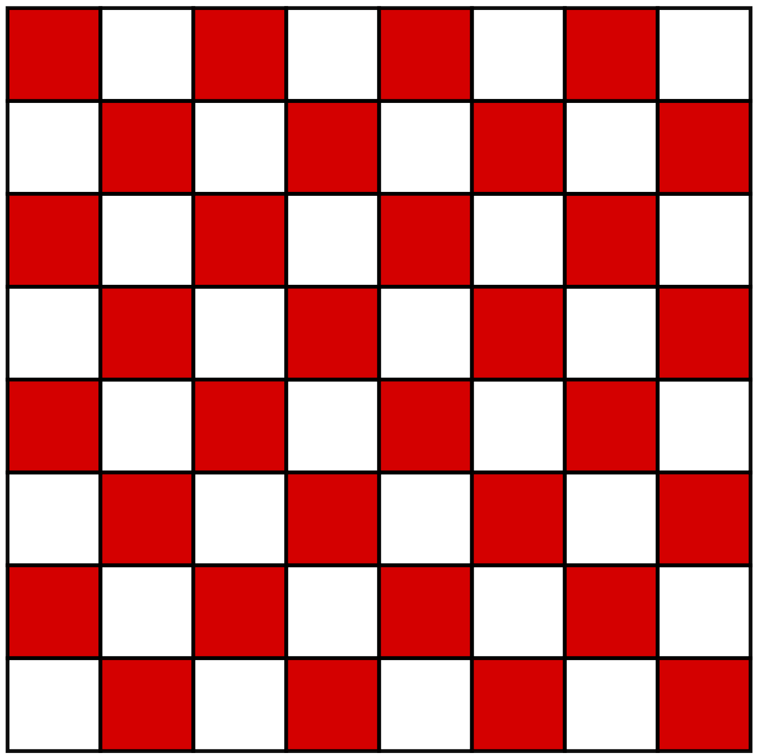
Embaldosados

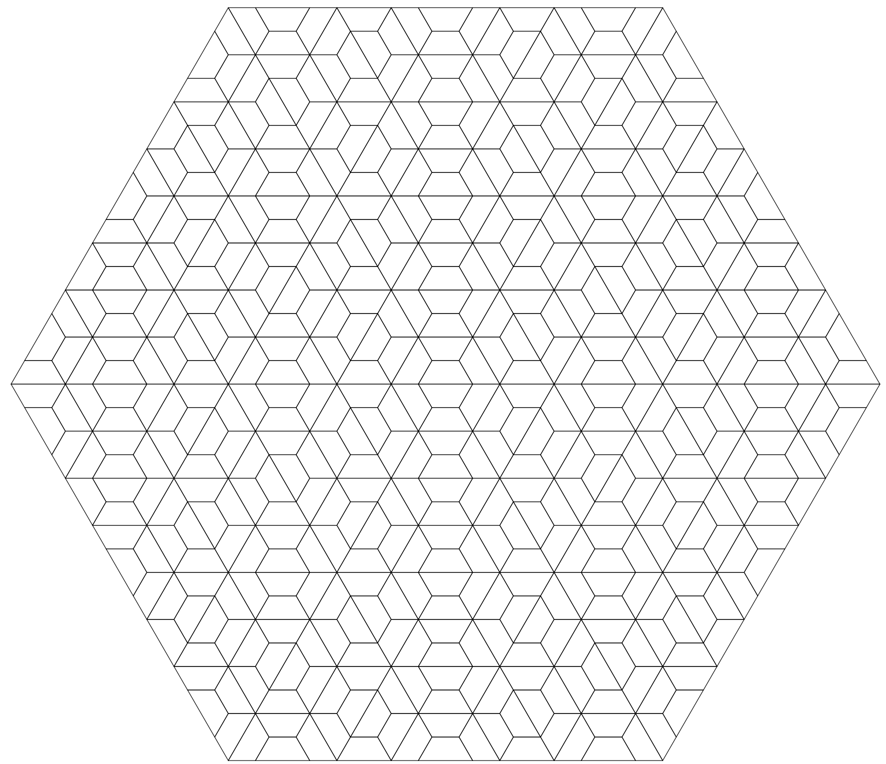
Un embaldosado de $\mathbb{R}^d$ es la unión de baldosas de manera que los interiores de las baldosas son disjuntos dos a dos

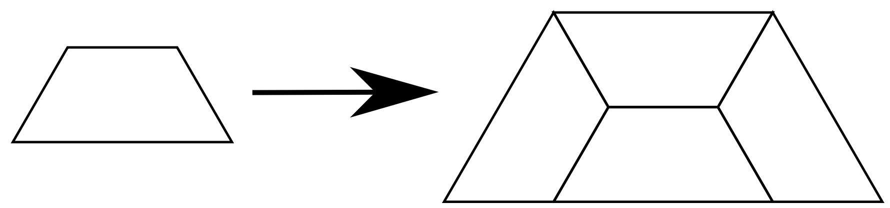
Embaldosados

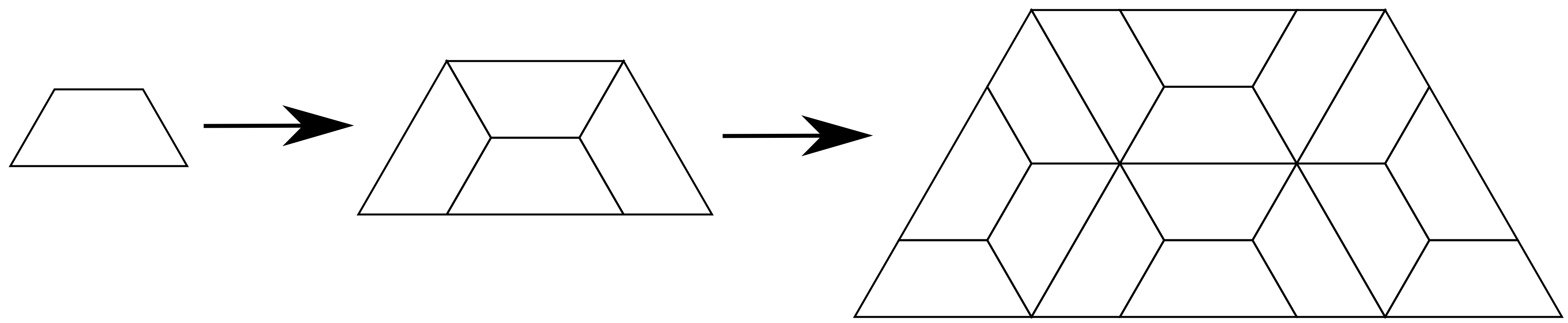
Un embaldosado de $\mathbb{R}^d$ es la unión de baldosas de manera que los interiores de las baldosas son disjuntos dos a dos

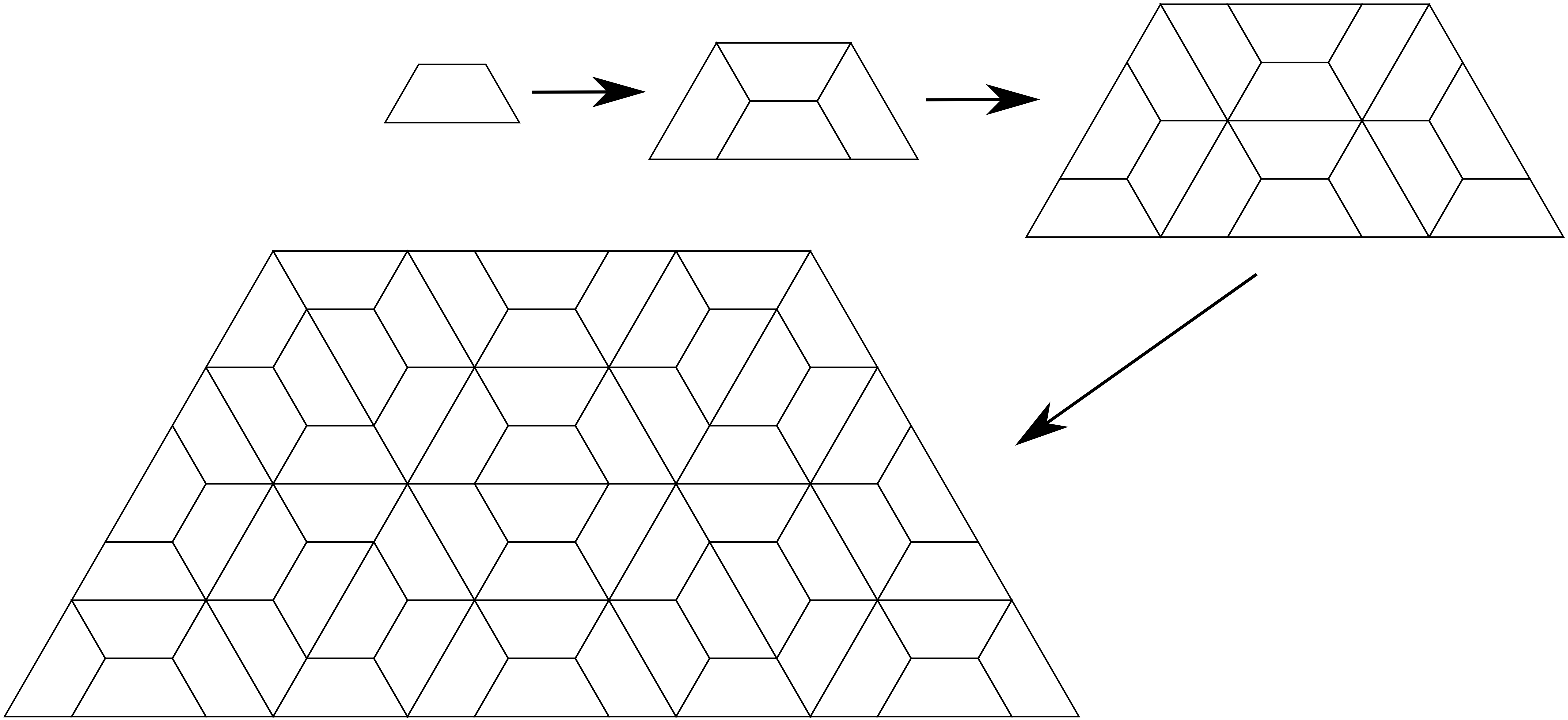
compacto simplemente conexo







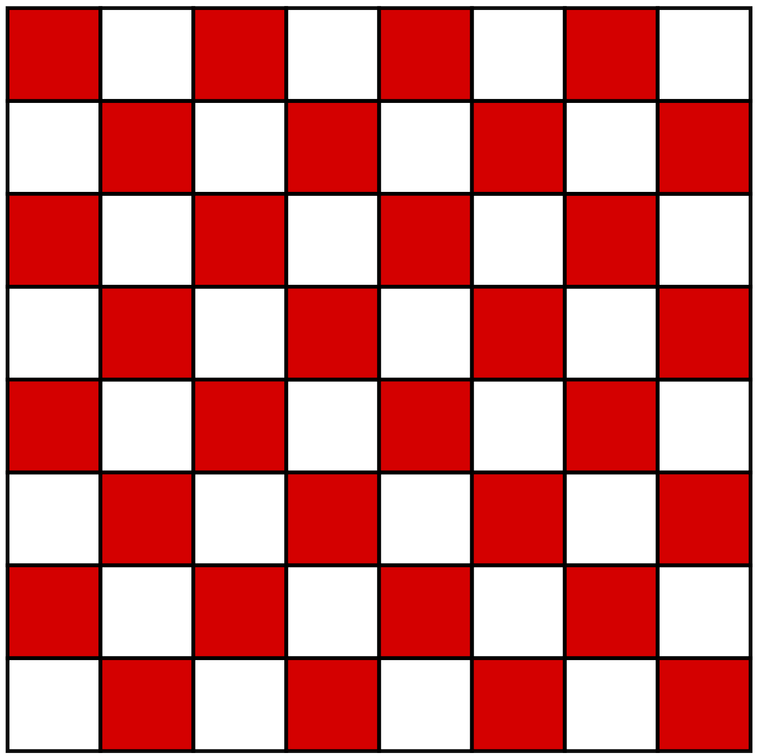




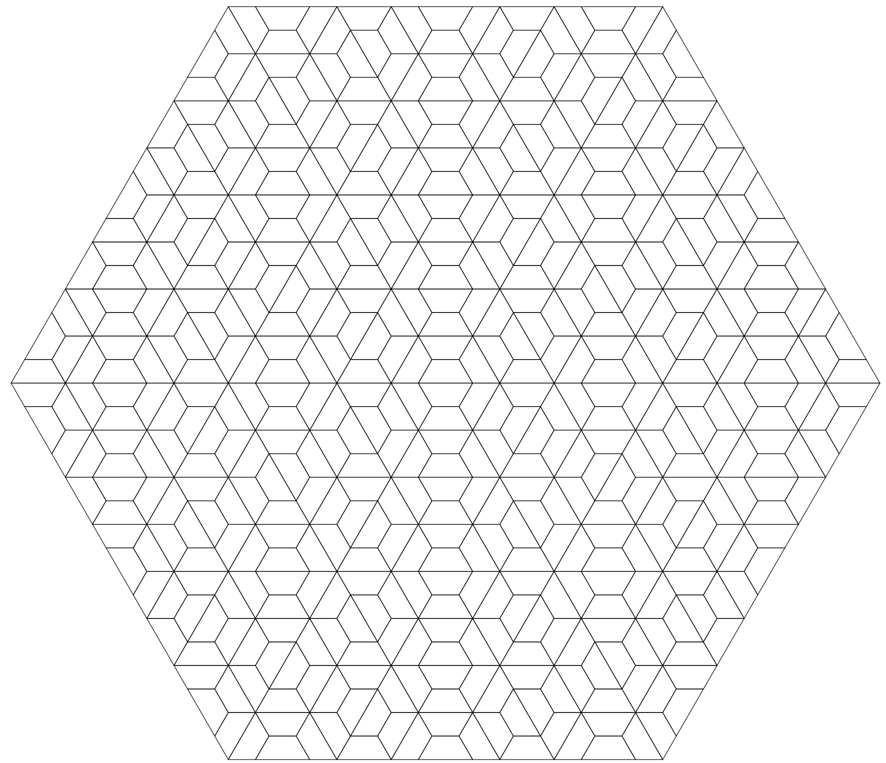
Embaldosados

Un embaldosado de $\mathbb{R}^d$ es la unión de $\boxed{\text{baldosas}}$ de manera que los interiores de las $\boxed{\text{baldosas}}$ son disjuntos dos a dos

compacto simplemente conexo



Periódico



Aperiódico

Embaldosados

Si $\mathcal{E}$ es un embaldosado y $v \in \mathbb{R}^d$ $\quad \varphi_v(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - v$ es el traslado

Embaldosados

Si $\mathcal{E}$ es un embaldosado y $v \in \mathbb{R}^d \quad \varphi_v(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - v$ es el traslado

Existe una métrica en el conjunto de todos los traslados de $\mathcal{E}$

Embaldosados

Si $\mathcal{E}$ es un embaldosado y $v \in \mathbb{R}^d \quad \varphi_v(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - v$ es el traslado

Existe una métrica en el conjunto de todos los traslados de $\mathcal{E}$

$d(\mathcal{E}, \varphi_v(\mathcal{E}))$ es pequeño si coinciden en una gran bola en torno al origen

Embaldosados

Si $\mathcal{E}$ es un embaldosado y $v \in \mathbb{R}^d$ $\quad \varphi_v(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - v$ es el traslado

Existe una métrica en el conjunto de todos los traslados de $\mathcal{E}$

$d(\mathcal{E}, \varphi_v(\mathcal{E}))$ es pequeño si coinciden en una gran bola en torno al origen

$\neq \|v\|$

Embaldosados

Si $\mathcal{E}$ es un embaldosado y $v \in \mathbb{R}^d$ $\quad \varphi_v(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - v$ es el traslado

Existe una métrica en el conjunto de todos los traslados de $\mathcal{E}$

$d(\mathcal{E}, \varphi_v(\mathcal{E}))$ es pequeño si coinciden en una gran bola en torno al origen

$\neq \|v\|$

Si $\mathcal{E}$ es repetitivo, aperiódico y tiene complejidad local finita:

Embaldosados

Si $\mathcal{E}$ es un embaldosado y $v \in \mathbb{R}^d$ $\quad \varphi_v(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - v$ es el traslado

Existe una métrica en el conjunto de todos los traslados de $\mathcal{E}$

$d(\mathcal{E}, \varphi_v(\mathcal{E}))$ es pequeño si coinciden en una gran bola en torno al origen

$\neq \|v\|$

Si $\mathcal{E}$ es repetitivo, aperiódico y tiene complejidad local finita:

$$\Omega_{\mathcal{E}} = \overline{\{\varphi_v(\mathcal{E}) : v \in \mathbb{R}^d\}}$$

Embaldosados

Si $\mathcal{E}$ es un embaldosado y $v \in \mathbb{R}^d$ $\quad \varphi_v(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - v$ es el traslado

Existe una métrica en el conjunto de todos los traslados de $\mathcal{E}$

$d(\mathcal{E}, \varphi_v(\mathcal{E}))$ es pequeño si coinciden en una gran bola en torno al origen

$\neq \|v\|$

Si $\mathcal{E}$ es repetitivo, aperiódico y tiene complejidad local finita:

$$\Omega_{\mathcal{E}} = \overline{\{\varphi_v(\mathcal{E}) : v \in \mathbb{R}^d\}}$$

Completamos

Embaldosados

Si $\mathcal{E}$ es un embaldosado y $v \in \mathbb{R}^d$ $\quad \varphi_v(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - v$ es el traslado

Existe una métrica en el conjunto de todos los traslados de $\mathcal{E}$

$d(\mathcal{E}, \varphi_v(\mathcal{E}))$ es pequeño si coinciden en una gran bola en torno al origen

$\neq \|v\|$

Si $\mathcal{E}$ es repetitivo, aperiódico y tiene complejidad local finita:

$$\Omega_{\mathcal{E}} = \overline{\{\varphi_v(\mathcal{E}) : v \in \mathbb{R}^d\}}$$

Completamos

Espacio de embaldosados

Embaldosados

Si $\mathcal{E}$ es un embaldosado y $v \in \mathbb{R}^d$ $\quad \varphi_v(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - v$ es el traslado

Existe una métrica en el conjunto de todos los traslados de $\mathcal{E}$

$d(\mathcal{E}, \varphi_v(\mathcal{E}))$ es pequeño si coinciden en una gran bola en torno al origen

$\neq \|v\|$

Si $\mathcal{E}$ es repetitivo, aperiódico y tiene complejidad local finita:

$$\Omega_{\mathcal{E}} = \overline{\{\varphi_v(\mathcal{E}) : v \in \mathbb{R}^d\}}$$

Completamos

Espacio de embaldosados

(Envoltura continua de $\mathcal{E}$)

Embaldosados

Si $\mathcal{E}$ es un embaldosado y $v \in \mathbb{R}^d$ $\quad \varphi_v(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - v$ es el traslado

Existe una métrica en el conjunto de todos los traslados de $\mathcal{E}$

$d(\mathcal{E}, \varphi_v(\mathcal{E}))$ es pequeño si coinciden en una gran bola en torno al origen

$\neq \|v\|$

Si $\mathcal{E}$ es repetitivo, aperiódico y tiene complejidad local finita:

$$\Omega_{\mathcal{E}} = \overline{\{\varphi_v(\mathcal{E}) : v \in \mathbb{R}^d\}}$$

Completamos

Espacio de embaldosados
(Envoltura continua de $\mathcal{E}$)

No es una variedad

Embaldosados

Si $\mathcal{E}$ es un embaldosado y $v \in \mathbb{R}^d$ $\quad \varphi_v(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - v$ es el traslado

Existe una métrica en el conjunto de todos los traslados de $\mathcal{E}$

$d(\mathcal{E}, \varphi_v(\mathcal{E}))$ es pequeño si coinciden en una gran bola en torno al origen

$\neq \|v\|$

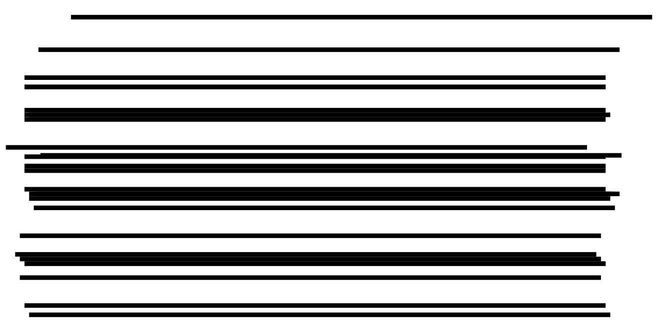
Si $\mathcal{E}$ es repetitivo, aperiódico y tiene complejidad local finita:

$$\Omega_{\mathcal{E}} = \overline{\{\varphi_v(\mathcal{E}) : v \in \mathbb{R}^d\}}$$

Completamos

Espacio de embaldosados
(Envoltura continua de $\mathcal{E}$)

Cantor



$B_\varepsilon(0)$

No es una variedad

Estructura local $B_\varepsilon(0) \times$ Cantor

Embaldosados

Si $\mathcal{E}$ es un embaldosado y $v \in \mathbb{R}^d$ $\quad \varphi_v(\mathcal{E}) = \mathcal{E} - v$ es el traslado

Existe una métrica en el conjunto de todos los traslados de $\mathcal{E}$

$d(\mathcal{E}, \varphi_v(\mathcal{E}))$ es pequeño si coinciden en una gran bola en torno al origen

$\neq \|v\|$

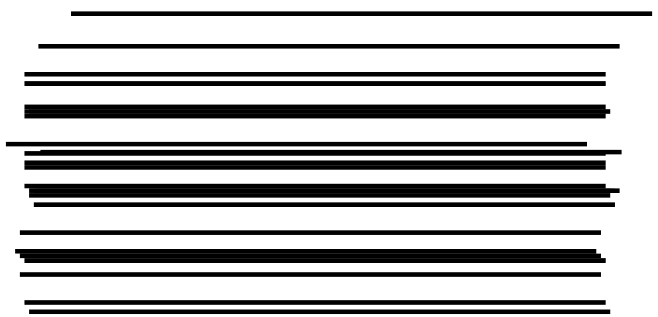
Si $\mathcal{E}$ es repetitivo, aperiódico y tiene complejidad local finita:

$$\Omega_{\mathcal{E}} = \overline{\{\varphi_v(\mathcal{E}) : v \in \mathbb{R}^d\}}$$

Completamos

Espacio de embaldosados
(Envoltura continua de $\mathcal{E}$)

Cantor



$B_\varepsilon(0)$

No es una variedad

Estructura local $B_\varepsilon(0) \times$ Cantor

Si $\mathcal{E}' \in \Omega_{\mathcal{E}}$, entonces $\Omega_{\mathcal{E}'} = \Omega_{\mathcal{E}}$

Embaldosados

$\mathbb{R}^d \curvearrowright \Omega_{\mathcal{E}}$ acción de $\mathbb{R}^d$

Embaldosados

$\mathbb{R}^d \curvearrowright \Omega_{\mathcal{E}}$ acción de $\mathbb{R}^d$ sistema dinámico minimal, unicamente ergódico

Embaldosados

$\mathbb{R}^d \curvearrowright \Omega_{\mathcal{E}}$ acción de $\mathbb{R}^d$ sistema dinámico minimal, unicamente ergódico   Localmente $\mu = \mathrm{Leb} \times \mathrm{freq}$

Embaldosados

$\mathbb{R}^d \curvearrowright \Omega_{\mathcal{E}}$ acción de $\mathbb{R}^d$ sistema dinámico minimal, unicamente ergódico Localmente $\mu = \text{Leb} \times \text{freq}$

Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo en patrones locales,

Embaldosados

$\mathbb{R}^d \curvearrowright \Omega_{\mathcal{E}}$ acción de $\mathbb{R}^d$ sistema dinámico minimal, unicamente ergódico Localmente $\mu = \text{Leb} \times \text{freq}$

Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo en patrones locales, existe una función $f : \Omega_{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}$ t.q.

Embaldosados

$\mathbb{R}^d \curvearrowright \Omega_{\mathcal{E}}$ acción de $\mathbb{R}^d$ sistema dinámico minimal, unicamente ergódico Localmente $\mu = \text{Leb} \times \text{freq}$

Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo en patrones locales, existe una función $f : \Omega_{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}$ t.q.

$$\frac{1}{\text{Vol}(B_T(0))} \int_{B_T(0)} h(t)\, dt$$

Embaldosados

$\mathbb{R}^d \curvearrowright \Omega_{\mathcal{E}}$ acción de $\mathbb{R}^d$ sistema dinámico minimal, unicamente ergódico Localmente $\mu = \text{Leb} \times \text{freq}$

Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo en patrones locales, existe una función $f : \Omega_{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}$ t.q.

$$\frac{1}{\text{Vol}(B_T(0))} \int_{B_T(0)} h(t)\, dt = \frac{1}{\text{Vol}(B_T(0))} \int_{B_T(0)} f \circ \varphi_t(\mathcal{E})\, dt$$

Embaldosados

$\mathbb{R}^d \curvearrowright \Omega_{\mathcal{E}}$ acción de $\mathbb{R}^d$ sistema dinámico minimal, unicamente ergódico Localmente $\mu = \text{Leb} \times \text{freq}$

Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo en patrones locales, existe una función $f : \Omega_{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}$ t.q.

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_T(0))} \int_{B_T(0)} h(t)\, dt = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_T(0))} \int_{B_T(0)} f \circ \varphi_t(\mathcal{E})\, dt \longrightarrow \mu(f)$$

Embaldosados

$\mathbb{R}^d \curvearrowright \Omega_{\mathcal{E}}$ acción de $\mathbb{R}^d$ sistema dinámico minimal, unicamente ergódico   Localmente $\mu = \text{Leb} \times \text{freq}$

Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo en patrones locales, existe una función $f : \Omega_{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}$ t.q.

$$\frac{1}{\text{Vol}(B_T(0))} \int_{B_T(0)} h(t)\, dt = \frac{1}{\text{Vol}(B_T(0))} \int_{B_T(0)} f \circ \varphi_t(\mathcal{E})\, dt \longrightarrow \mu(f)$$

¿Y qué ?

Embaldosados

$\mathbb{R}^d \curvearrowright \Omega_{\mathcal{E}}$ acción de $\mathbb{R}^d$ sistema dinámico minimal, unicamente ergódico Localmente $\mu = \text{Leb} \times \text{freq}$

Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo en patrones locales, existe una función $f : \Omega_{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}$ t.q.

$$\frac{1}{\text{Vol}(B_T(0))} \int_{B_T(0)} h(t)\, dt = \frac{1}{\text{Vol}(B_T(0))} \int_{B_T(0)} f \circ \varphi_t(\mathcal{E})\, dt \longrightarrow \mu(f)$$

¿Y qué ?

El patrón de difracción de un cuasicristal modelado por $\mathcal{E}$ se obtiene aplicando el teorema de Birkhoff (Dworkin)

Embaldosados

$\mathbb{R}^d \curvearrowright \Omega_{\mathcal{E}}$ acción de $\mathbb{R}^d$ sistema dinámico minimal, unicamente ergódico Localmente $\mu = \text{Leb} \times \text{freq}$

Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo en patrones locales, existe una función $f : \Omega_{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}$ t.q.

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B_T(0))} \int_{B_T(0)} h(t)\, dt = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_T(0))} \int_{B_T(0)} f \circ \varphi_t(\mathcal{E})\, dt \longrightarrow \mu(f)$$

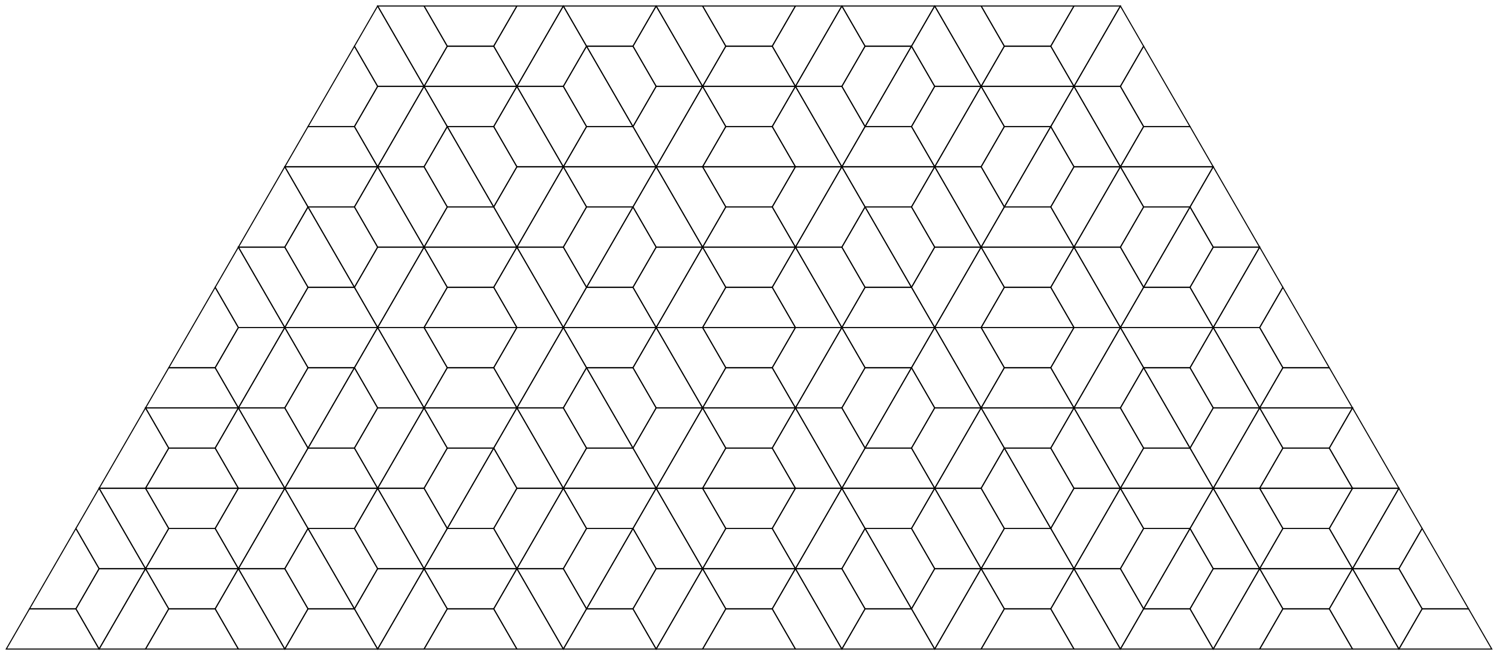
¿Y qué ?

El patrón de difracción de un cuasicristal modelado por $\mathcal{E}$ se obtiene aplicando el teorema de Birkhoff (Dworkin)

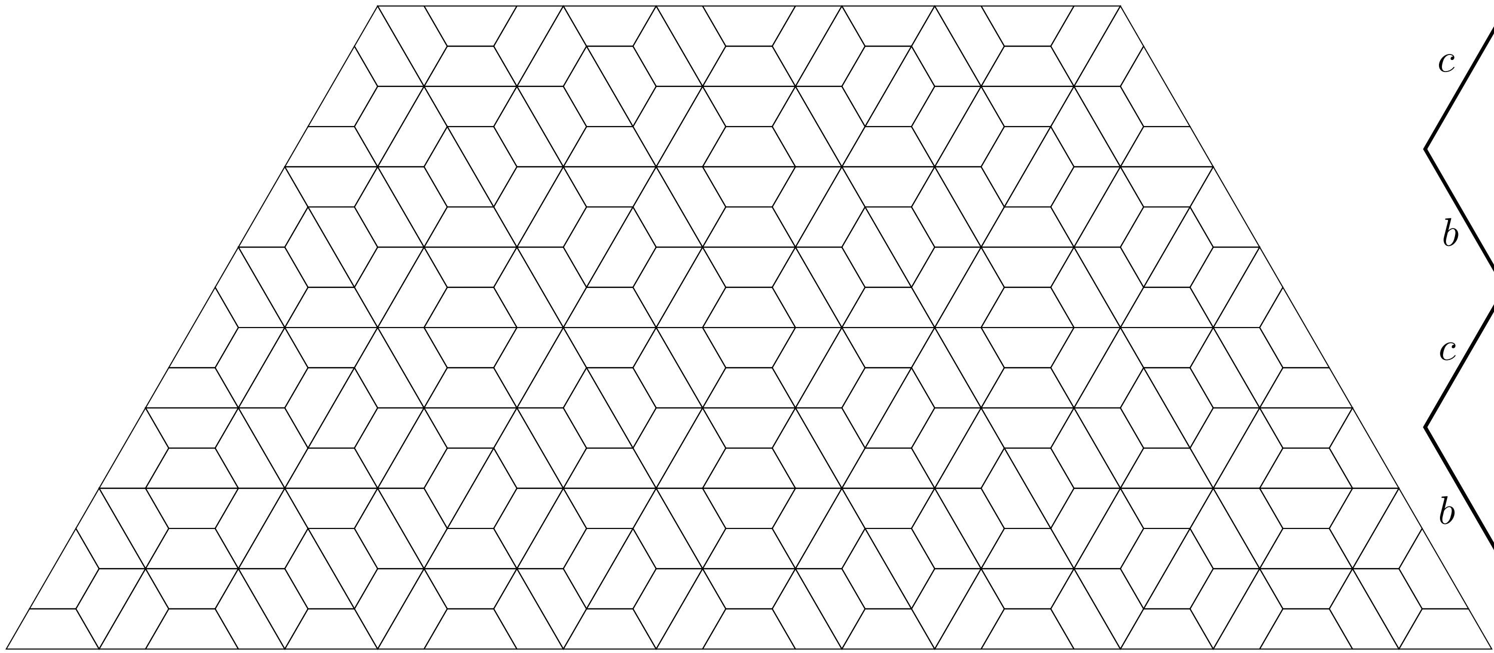
Otras aplicaciones a ciertos problemas de la mecánica cuántica en cuasicristales (Bellissard)

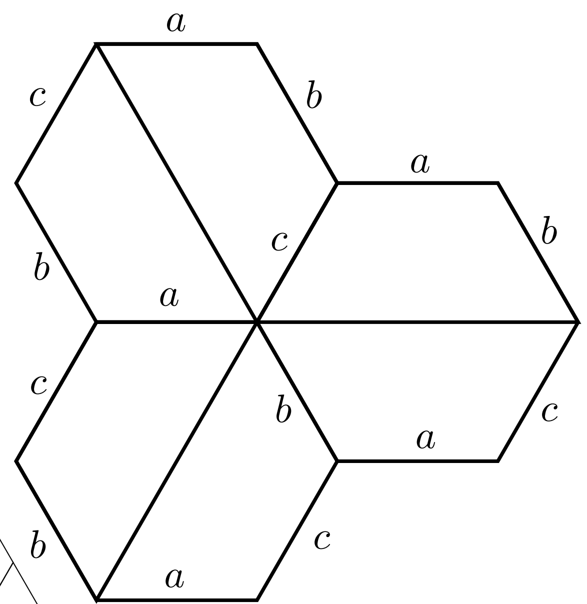
El gas de Lorentz en cuasicristales

El gas de Lorentz en cuasicristales

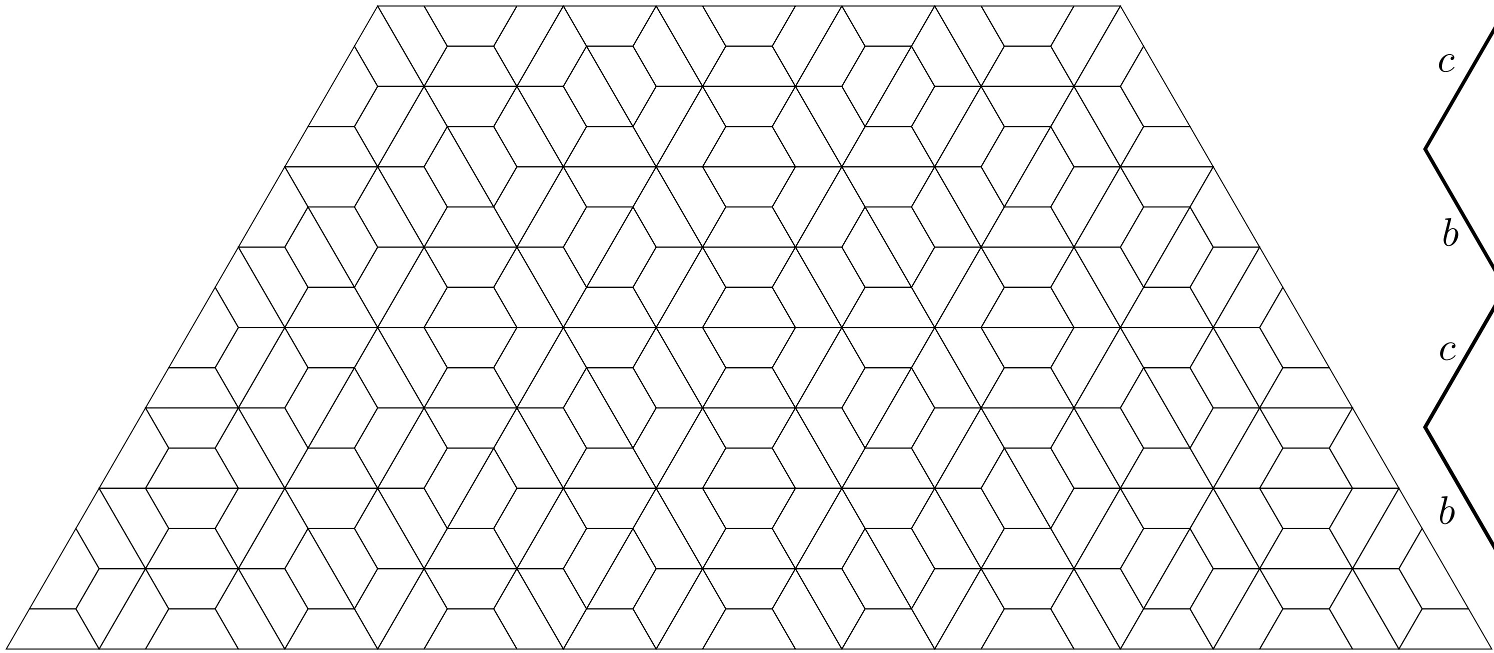


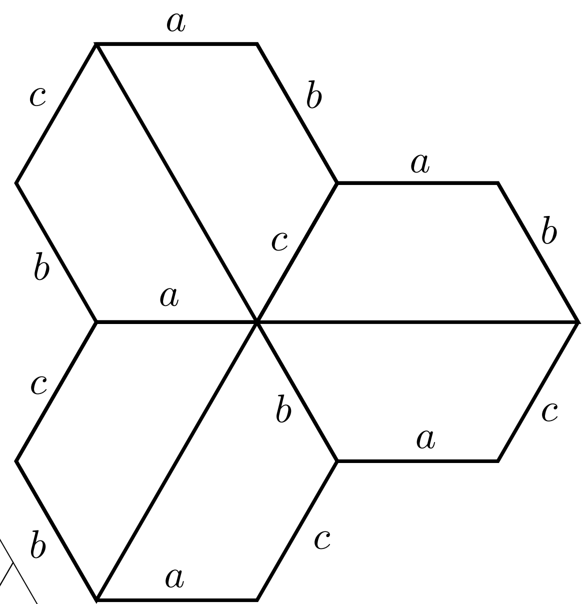
El gas de Lorentz en cuasicristales

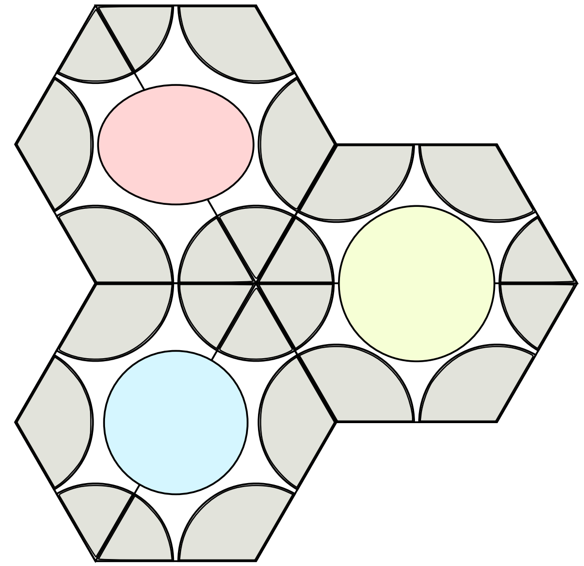




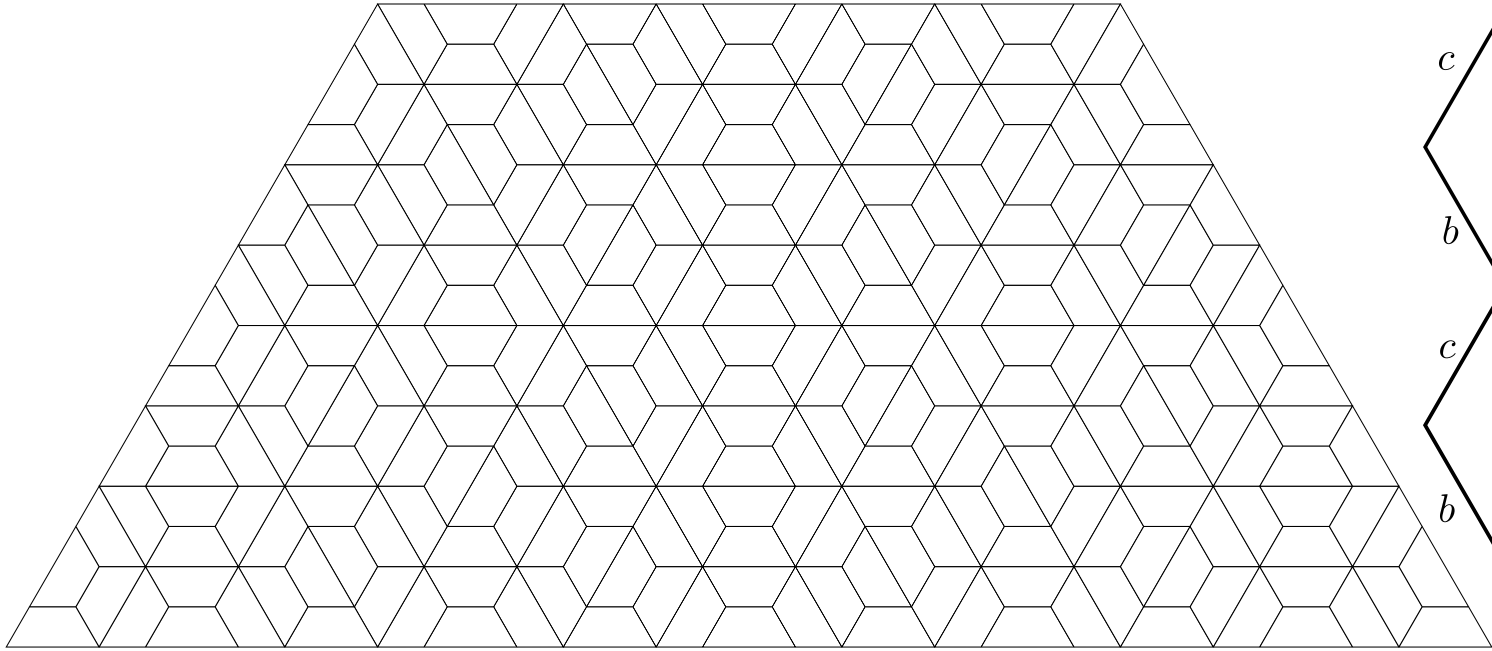
El gas de Lorentz en cuasicristales

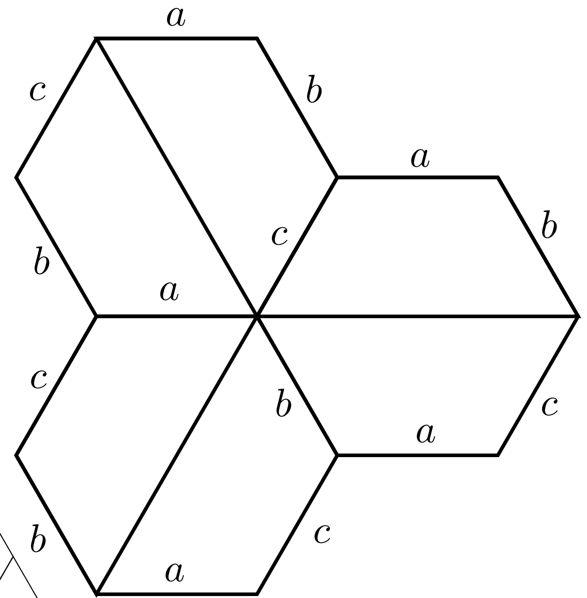


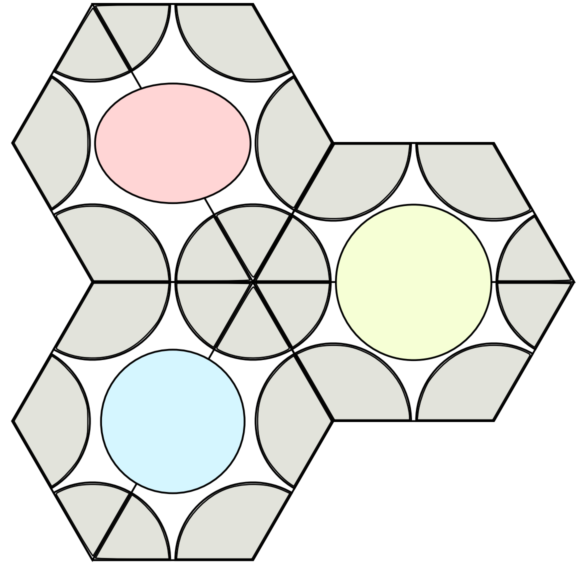


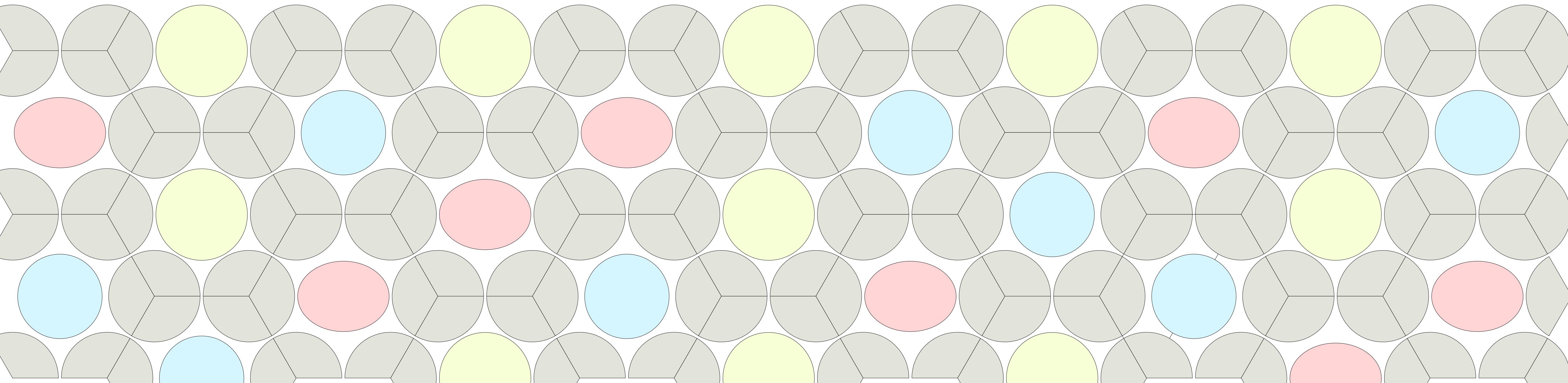


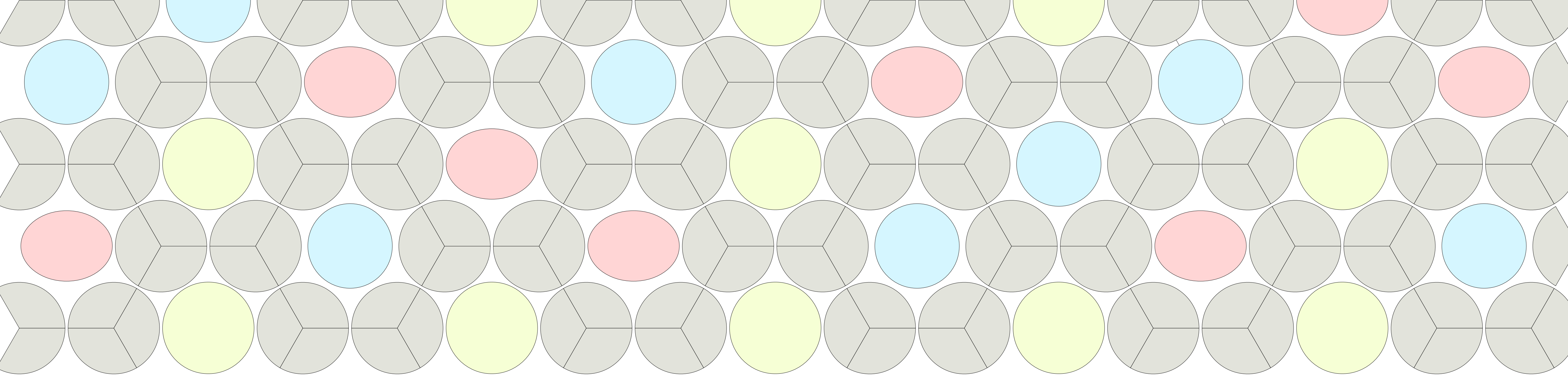
El gas de Lorentz en cuasicristales



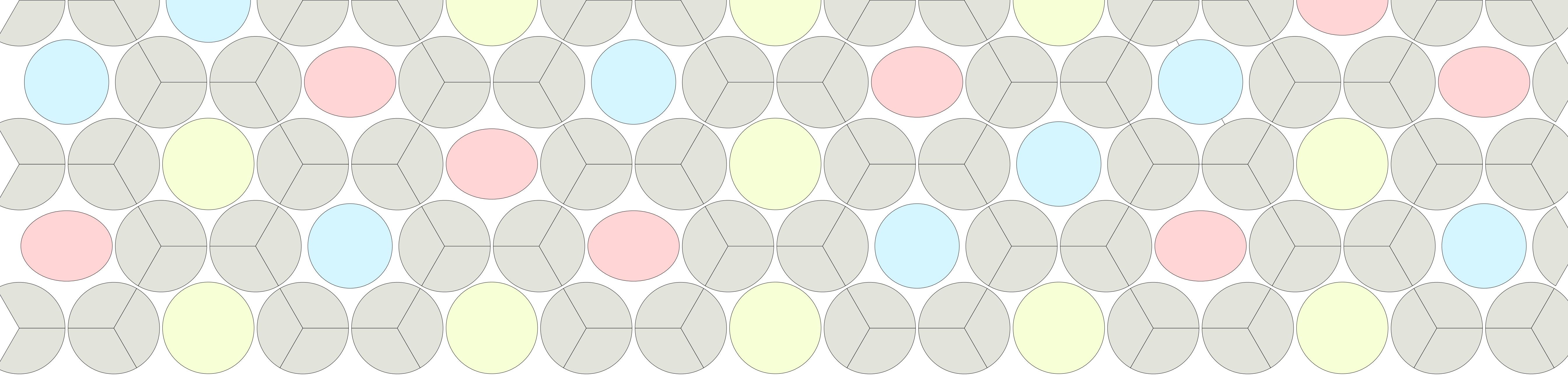






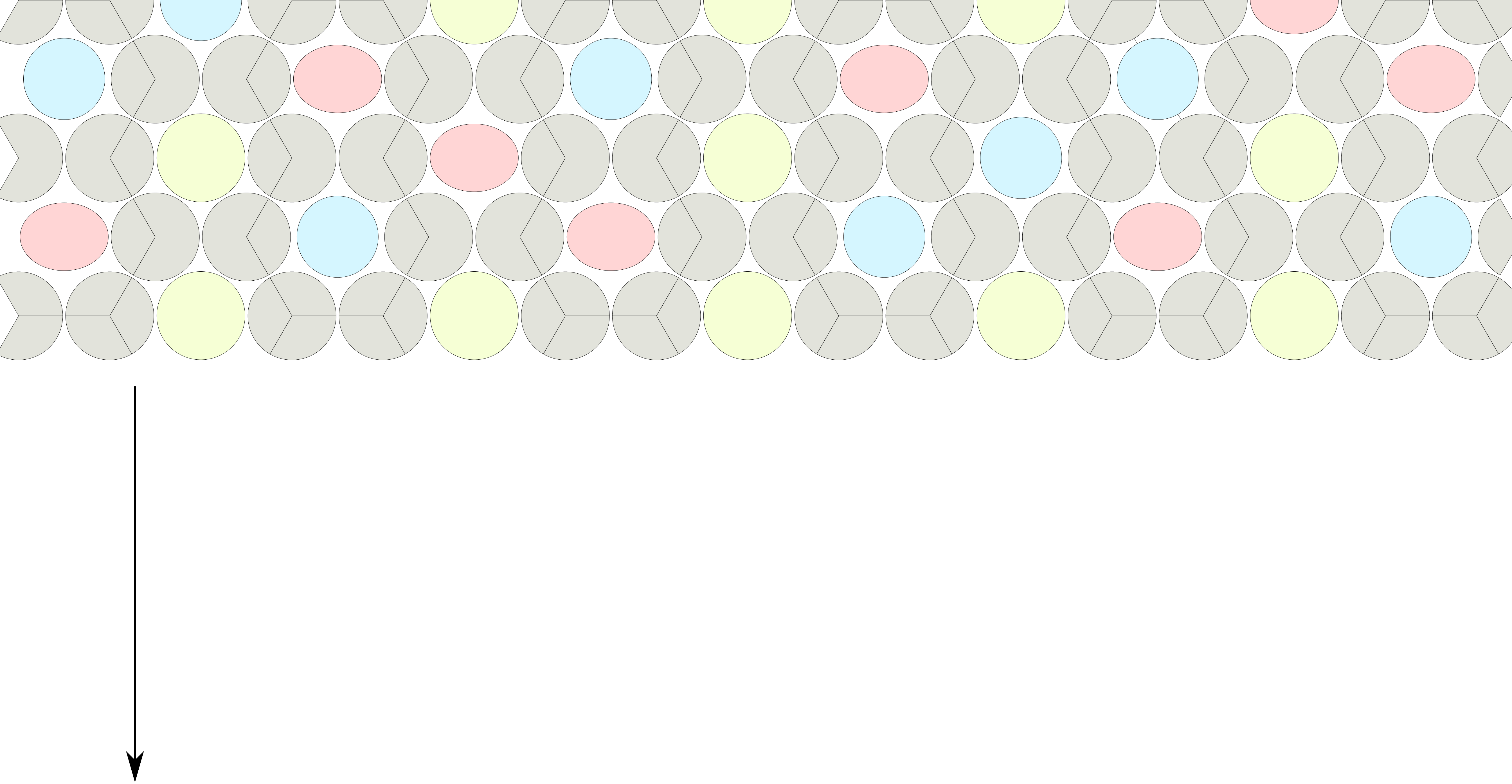


Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

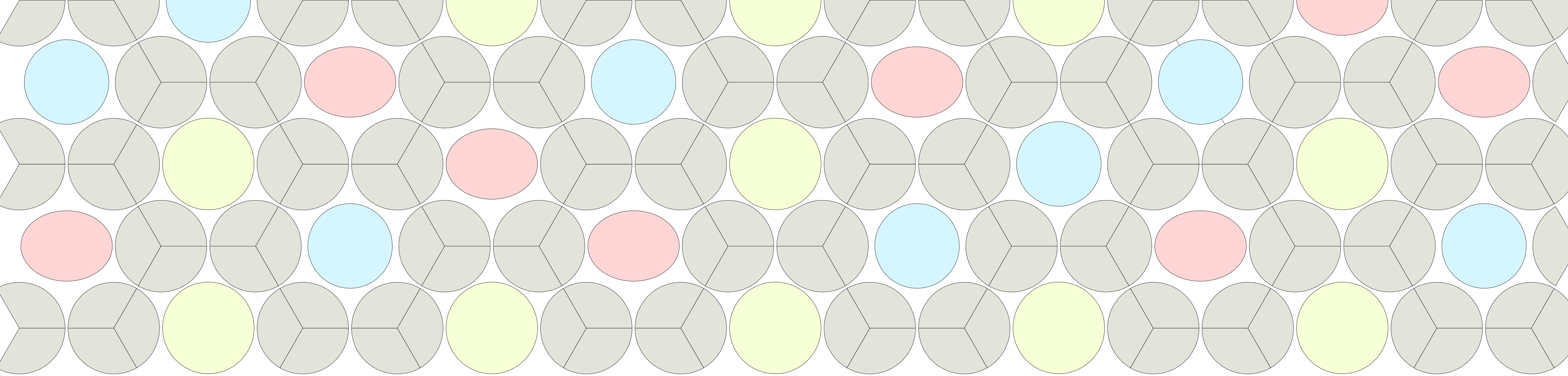


Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

$$\Omega_{\mathcal{E}}$$

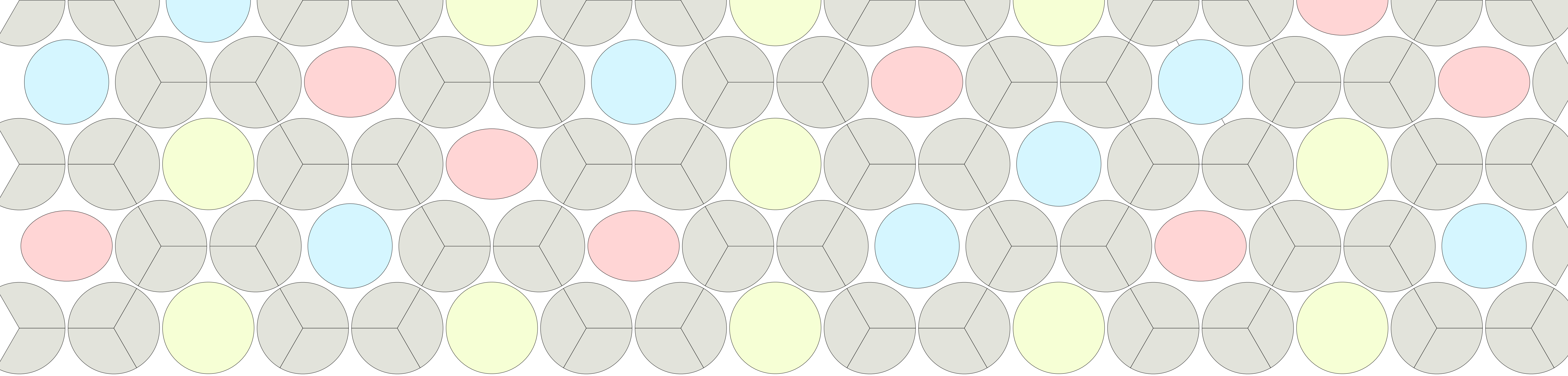


$\Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$



Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

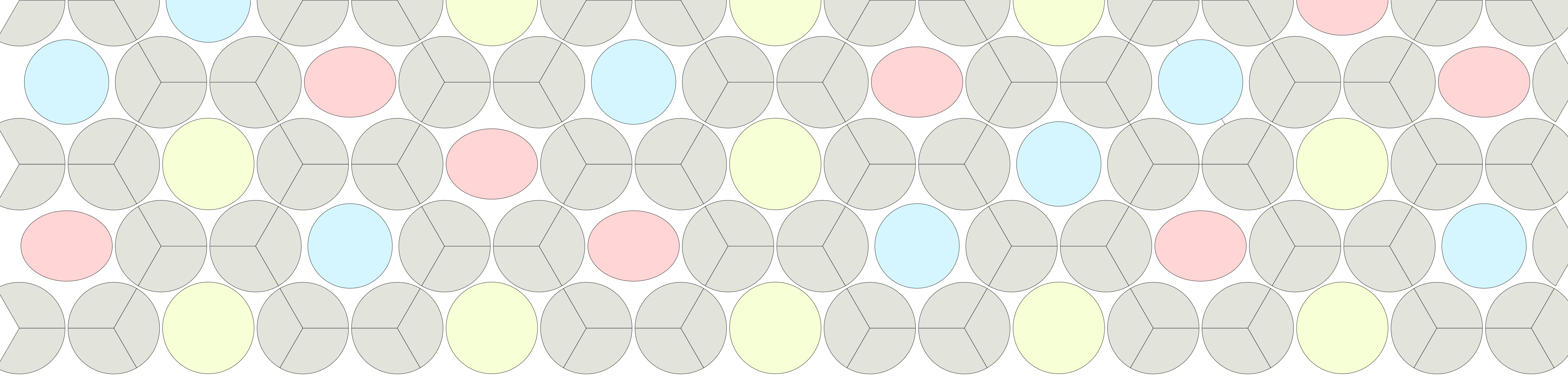
$$\mathcal{D} \subset \Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$$



Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

Si $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y depende solo de la configuración local de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{D} \subset \Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$$

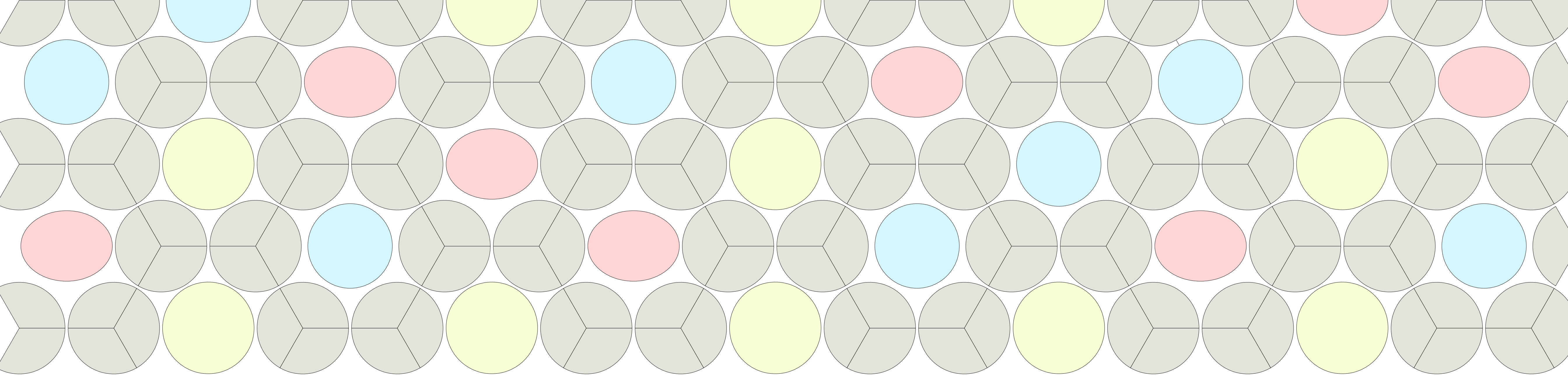


Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

Si $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y depende solo de la configuración local de $\mathcal{E}$

Teorema (T-Zelerowicz 2021)

$$\mathcal{D} \subset \Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$$

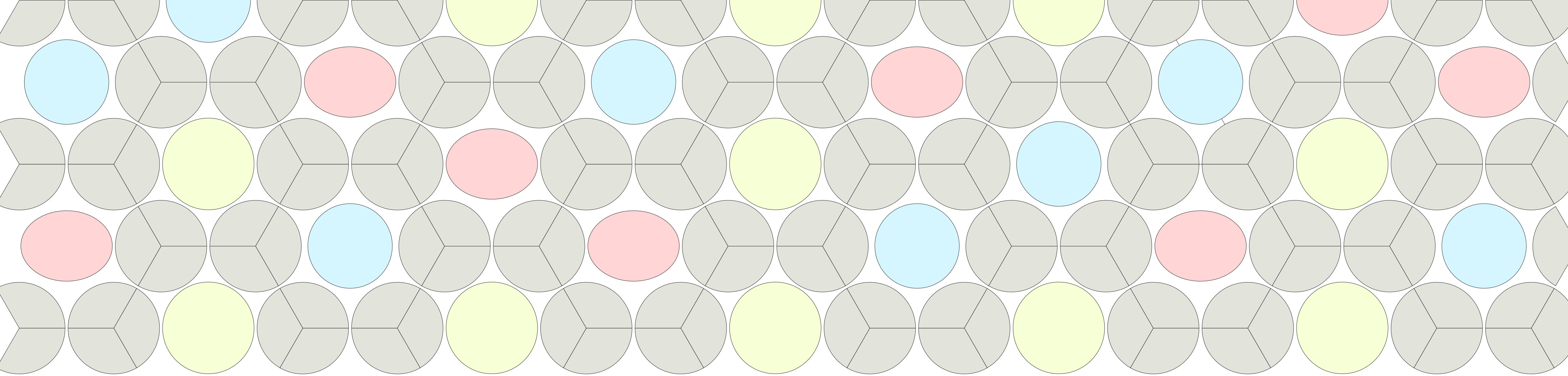


Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

Si $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y depende solo de la configuración local de $\mathcal{E}$

Teorema (T-Zelerowicz 2021): Para cada $x \in \partial\mathcal{S}$,

$$\mathcal{D} \subset \Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$$



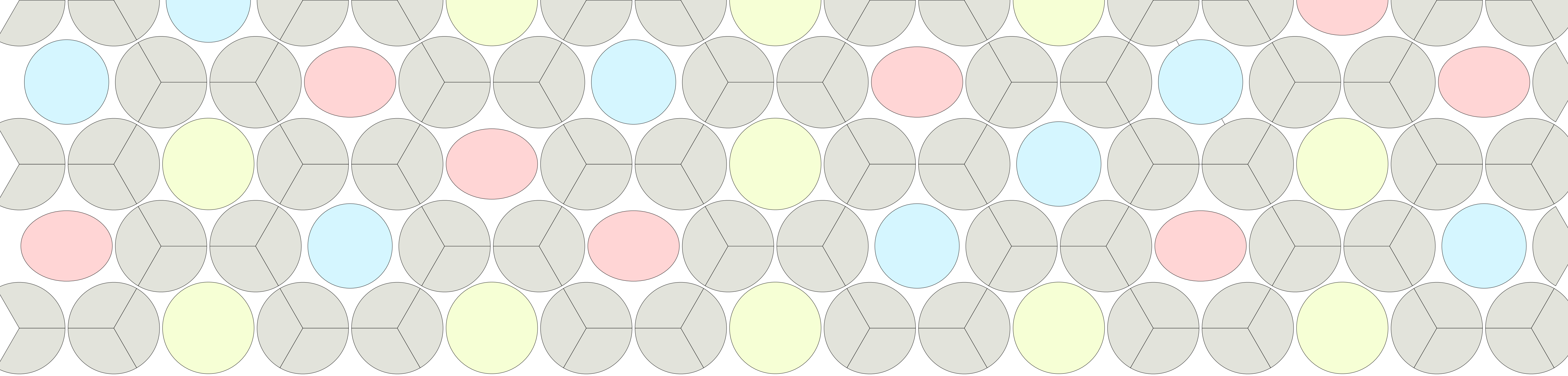
Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

Si $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y depende solo de la configuración local de $\mathcal{E}$

Teorema (T-Zelerowicz 2021): Para cada $x \in \partial\mathcal{S}$,

$$h_1 \circ F^n \cdot h_2(y, \theta)$$

$$\mathcal{D} \subset \Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$$



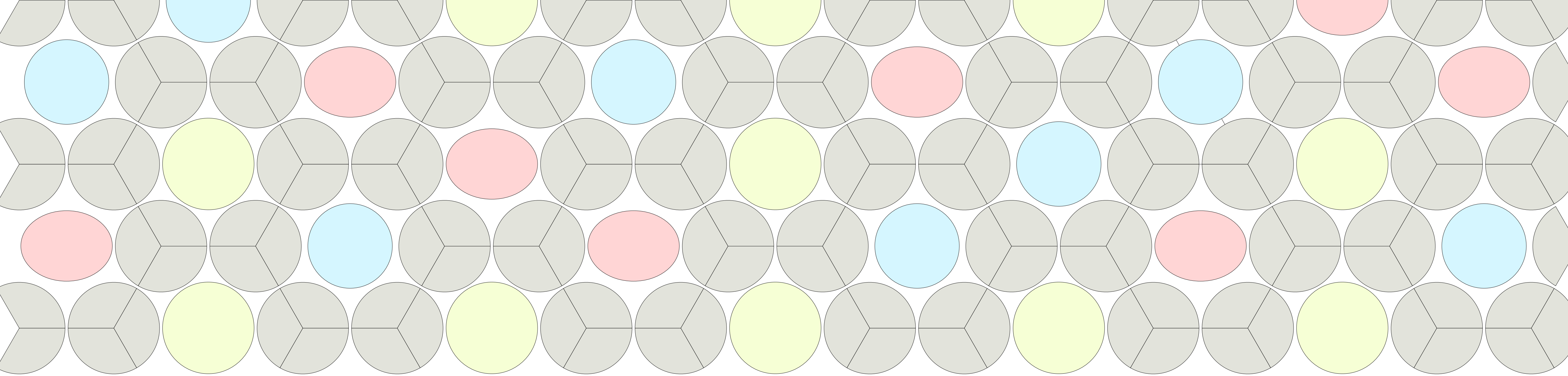
Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

Si $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y depende solo de la configuración local de $\mathcal{E}$

Teorema (T-Zelerowicz 2021): Para cada $x \in \partial\mathcal{S}$,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1 \circ F^n \cdot h_2(y, \theta)\ \cos\theta \, d\theta$$

$$\mathcal{D} \subset \Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$$



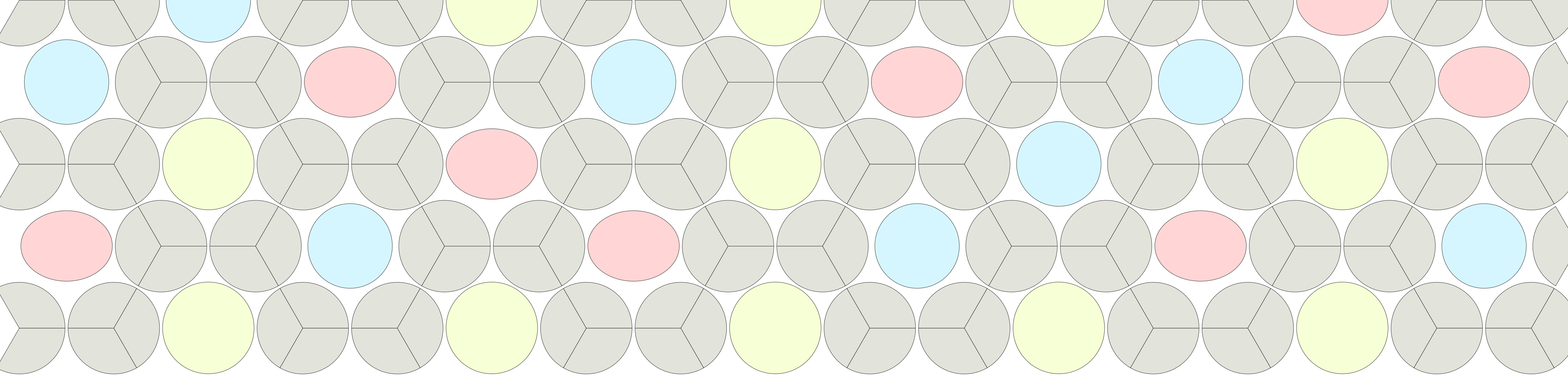
Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

Si $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y depende solo de la configuración local de $\mathcal{E}$

Teorema (T-Zelerowicz 2021): Para cada $x \in \partial\mathcal{S}$,

$$\frac{1}{2\pi T^2} \int_{\partial\mathcal{S} \cap B_T(x)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1 \circ F^n \cdot h_2(y, \theta) \, \cos\theta \, d\theta \, dy$$

$$\mathcal{D} \subset \Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$$



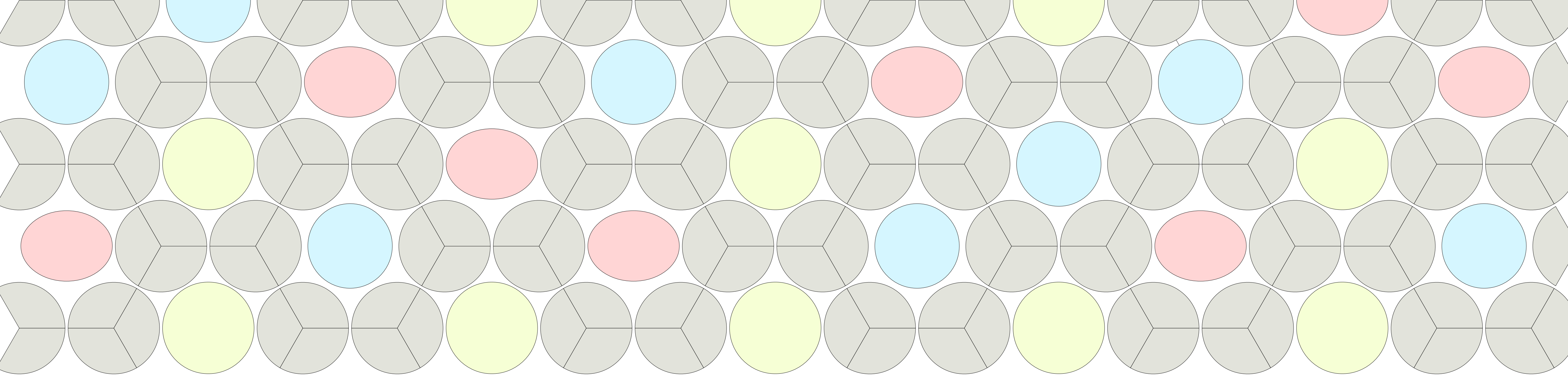
Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

Si $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y depende solo de la configuración local de $\mathcal{E}$

Teorema (T-Zelerowicz 2021): Para cada $x \in \partial\mathcal{S}$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T^2} \int_{\partial\mathcal{S}\cap B_T(x)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1 \circ F^n \cdot h_2(y,\theta)\ \cos\theta\, d\theta\, dy$$

$$\mathcal{D} \subset \Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$$



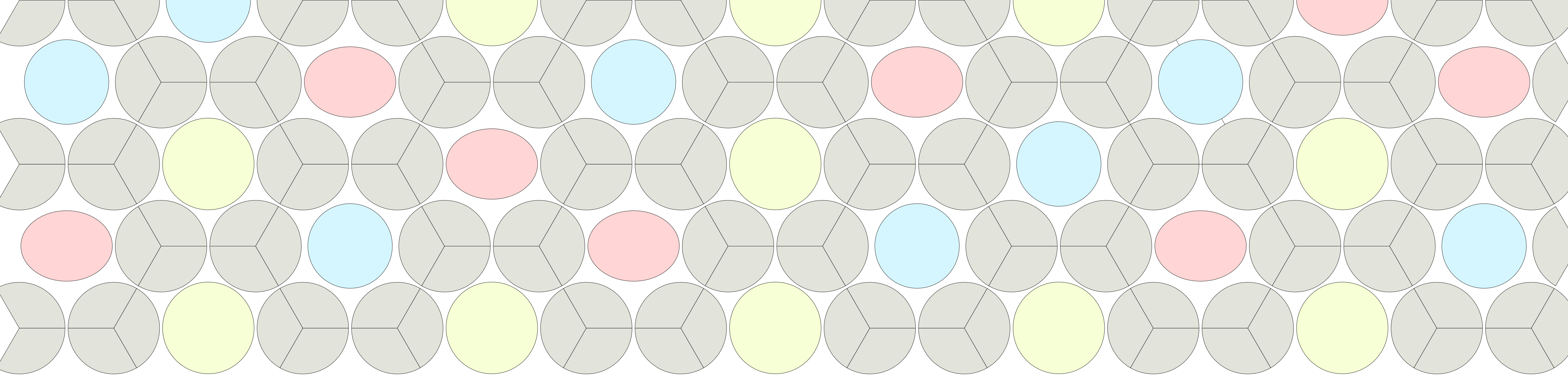
Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

Si $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y depende solo de la configuración local de $\mathcal{E}$

Teorema (T-Zelerowicz 2021): Para cada $x \in \partial\mathcal{S}$,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T^2} \int_{\partial\mathcal{S}\cap B_T(x)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1 \circ F^n \cdot h_2(y,\theta)\, \cos\theta \, d\theta \, dy$$

$$\mathcal{D} \subset \Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$$



Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

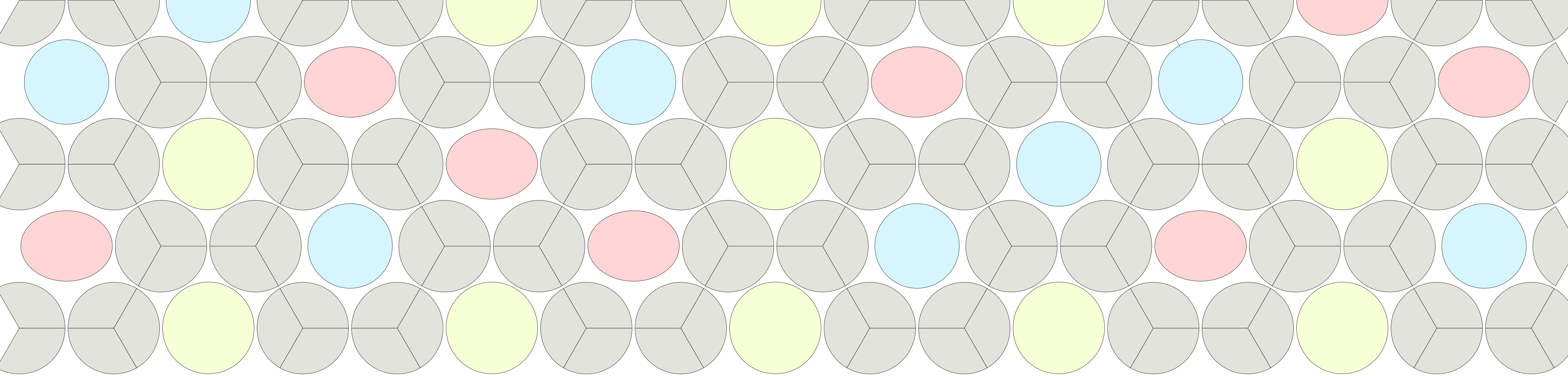
Si $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y depende solo de la configuración local de $\mathcal{E}$

Teorema (T-Zelerowicz 2021): Para cada $x \in \partial\mathcal{S}$,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T^2} \int_{\partial\mathcal{S}\cap B_T(x)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1 \circ F^n \cdot h_2(y,\theta) \, \cos\theta \, d\theta \, dy$$

$$=$$

$$\mathcal{D} \subset \Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$$



Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

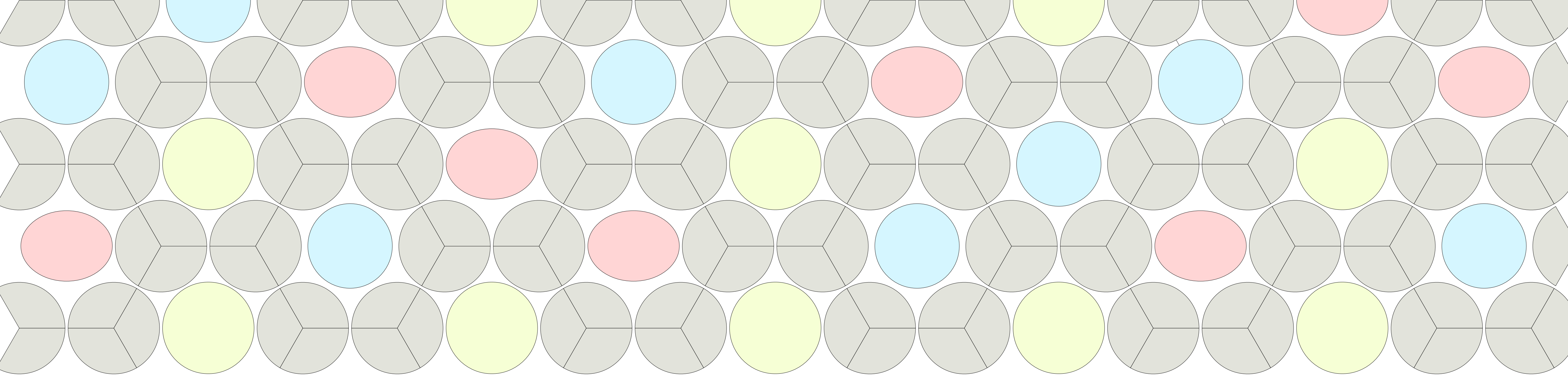
Si $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y depende solo de la configuración local de $\mathcal{E}$

Teorema (T-Zelerowicz 2021): Para cada $x \in \partial\mathcal{S}$,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T^2} \int_{\partial\mathcal{S}\cap B_T(x)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1 \circ F^n \cdot h_2(y,\theta)\ \cos\theta\, d\theta\, dy$$

$$= \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T^2} \int_{\partial\mathcal{S}\cap B_T(x)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1(y,\theta)\ \cos\theta\, d\theta\, dy\right) \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T^2} \int_{\partial\mathcal{S}\cap B_T(x)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_2(y,\theta)\ \cos\theta\, d\theta\, dy\right)$$

$$\mathcal{D} \subset \Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$$



Casi nada se sabe del gas de Lorentz aperiódico

Si $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable y depende solo de la configuración local de $\mathcal{E}$

Teorema (T-Zelerowicz 2021): Para cada $x \in \partial\mathcal{S}$,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T^2} \int_{\partial\mathcal{S}\cap B_T(x)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1 \circ F^n \cdot h_2(y,\theta)\ \cos\theta\, d\theta\, dy$$

$$= \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T^2} \int_{\partial\mathcal{S}\cap B_T(x)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_1(y,\theta)\ \cos\theta\, d\theta\, dy\right) \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T^2} \int_{\partial\mathcal{S}\cap B_T(x)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_2(y,\theta)\ \cos\theta\, d\theta\, dy\right)$$

$\bar{\mu}(f_1)\bar{\mu}(f_2)$

$\mathcal{D} \subset \Omega_{\mathcal{E}} \times [-\pi/2, \pi/2]$